УДК 519.174.7 + 519.154

А. Е. Звонарев[2], *А. М. Райгородский*[1,3,4]

[1] Кафедра дискретной математики факультета инноваций и высоких технологий МФТИ;
[2] Кафедра теории вероятностей механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова;
[3] Кафедра математической статистики механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова;
[4] Отдел теоретических и прикладных исследований, ООО «Яндекс»

О дистанционных графах с большим хроматическим и малым кликовым числами

Работа связана с изучением хроматического числа $\chi(\mathbb{R}^n)$ евклидова пространства, которое определяется как минимальное количество цветов, необходимых для такой покраски точек $\mathbb{R}^n$, что любые две точки, отстоящие друг от друга на расстояние 1, покрашены в разные цвета. Известно, что $\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant (\zeta + o(1))^n$, где $\zeta = 1.239\ldots$ Это равносильно существованию n-мерного дистанционного графа (вершины — точки, ребра — отрезки длины 1) с хроматическим числом $(\zeta + o(1))^n$. Мы доказываем гораздо большее: существуют дистанционные графы с хроматическим числом $(\zeta + o(1))^n$ и без клик растущего размера.

Ключевые слова: хроматическое число пространства, дистанционный граф, граф без клик, теория Рамсея.

1. Введение и формулировка результата

Назовем *дистанционным графом*, или *графом расстояний*, любой граф $G = (V, E)$, у которого

$$V \subseteq \mathbb{R}^n, \quad E \subseteq \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = a\}, \quad a > 0.$$

Здесь $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ — обычное евклидово расстояние между векторами $\mathbf{x}, \mathbf{y}$. Желая подчеркнуть, что вершины графа принадлежат пространству размерности n, будем говорить об *n-мерном* дистанционном графе. Если $|V| < \infty$, то скажем явно, что граф расстояний конечный.

Напомним, что *хроматическим числом* графа $G = (V, E)$ называется величина $\chi(G)$, равная наименьшему количеству цветов, в которые можно так покрасить элементы множества V, чтобы концы любого ребра из множества E были разных цветов. В свою очередь *обхватом* графа G называется длина $g(G)$ кратчайшего цикла в нем. Классическое утверждение П. Эрдеша (см. [1]) гласит, что для любых k, l существует граф G, у которого $\chi(G) > k$, $g(G) > l$. Утверждение доказывается с помощью вероятностного метода.

Основной вопрос настоящей работы: что служит естественным аналогом утверждения Эрдеша для дистанционных графов? Этот вопрос тесно связан с известной проблемой Нелсона–Хадвигера. Эта проблема состоит в отыскании *хроматического числа пространства* $\mathbb{R}^n$, т.е. величины $\chi(\mathbb{R}^n)$, равной наименьшему количеству цветов, в которые можно так покрасить все точки $\mathbb{R}^n$, чтобы между одноцветными точками не было расстояния 1. В терминах дистанционных графов $\chi(\mathbb{R}^n)$ — это хроматическое число графа расстояний, у которого $V = \mathbb{R}^n$. А поскольку, как нетрудно видеть, $\chi(\mathbb{R}^n) < \infty$, некоторые соображения

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 12-01-00683, гранта Президента РФ № МД-666.2012.1 и гранта НШ-2519.2012.1 поддержки ведущих научных школ.

компактности (см. [2]) показывают, что хроматическое число пространства достигается на конечном n-мерном дистанционном графе.

Сейчас известно, что

$$(\zeta + o(1))^n \leqslant \chi(\mathbb{R}^n) \leqslant (3 + o(1))^n, \quad \zeta = 1.239\ldots$$

Нижняя оценка принадлежит А. М. Райгородскому (см. [3]), верхняя — Д. Ларману и К. А. Роджерсу (см. [4]).

В терминах графов расстояний нижнюю оценку можно сформулировать так: существует функция $\delta = \delta(n)$, стремящаяся к нулю при $n \to \infty$, и такая последовательность конечных n-мерных дистанционных графов G_n, что $\chi(G_n) \geqslant (\zeta + \delta(n))^n$.

Назовем *кликой* в графе любой полный подграф в нем, а *кликовым числом* графа — число вершин в самой большой клике. Заметим, что клика в графе расстояний — это симплекс. Обозначим кликовое число графа G через $\omega(G)$. Естественный аналог утверждения Эрдеша в дистанционном случае звучит примерно так: существует последовательность конечных n-мерных графов расстояний G_n, у которых кликовые числа «маленькие», а хроматические числа растут экспоненциально.

В работах [5—8] изучались величины

$$\zeta(k) = \sup\{\zeta : \ \exists\ \delta(n) = o(1),\ \forall\ n,\ \exists\ G \text{ в } \mathbb{R}^n,\ \omega(G) < k,\ \chi(G) \geqslant (\zeta + \delta(n))^n\}.$$

Для этих величин получены достаточно хорошие оценки. Для нас сейчас важно то, что, как видно из этих оценок, $\zeta(k) \to \zeta$ при $k \to \infty$. В настоящей работе мы докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $k = k(n)$ — любая функция, стремящаяся к бесконечности с ростом n. Тогда существуют функция $\delta = \delta(n)$, стремящаяся к нулю при $n \to \infty$, и такая последовательность конечных n-мерных дистанционных графов G_n, что $\chi(G_n) \geqslant (\zeta + \delta(n))^n$ и $\omega(G_n) \leqslant k(n)$.*

Пафос теоремы в том, что константа в основании экспоненты, которая служит оценкой для хроматического числа, *в точности равна* величине ζ, а не просто «близка» к ней. И для этого достаточен любой сколь угодно медленный рост верхней границы $k(n)$ для кликового числа.

Теорему 1 мы докажем в следующем разделе. А в завершение этого раздела скажем, что с проблемой Нелсона–Хадвигера можно ознакомиться по обзорам [9, 10] и по книгам [11—16].

2. Доказательство теоремы 1

Зафиксируем произвольную функцию $k = k(n)$, стремящуюся к бесконечности с ростом n.

Пусть для начала a и $b < a$ — произвольные числа из интервала $(0, 1/2)$. Для каждой пары таких чисел рассмотрим последовательность множеств

$$V_n(a,b) = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : \ x_i \in \{-1, 0, 1\},\ |\{i : \ x_i = 1\}| = [an],\ |\{i : \ x_i = -1\}| = [bn]\}.$$

Здесь $[x]$ — целая часть числа x. Стандартные вычисления с применением формулы Стирлинга показывают, что $|V_n(a,b)| = (\beta(a,b) + o(1))^n$, где $\beta(a,b) > 1$. Пусть p — минимальное простое число, такое, что $[an] + [bn] - 2p < -2[bn]$. Обозначив через $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ евклидово скалярное произведение векторов, положим

$$E_n(a,b) = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_n(a,b),\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [an] + [bn] - p\}.$$

Образовалась последовательность конечных n-мерных дистанционных графов $G_n(a,b) = (V_n(a,b),\ E_n(a,b))$.

Назовем множество $W \subseteq V$ вершин какого-либо графа $G = (V, E)$ *независимым*, если никакие два его элемента не соединены ребром из множества E. Размер любого из максимальных по мощности независимых множеств в графе G обозначим через $\alpha(G)$ и будем говорить, что $\alpha(G)$ — *число независимости* данного графа. В определенном смысле независимые множества — это «антиклики»; именно поэтому число независимости и кликовое число принято обозначать первой и последней буквами греческого алфавита.

В работе [3] показано, что $\alpha(G_n(a,b)) \leqslant (\gamma(a,b)+o(1))^n$, где $1 < \gamma(a,b) < \beta(a,b)$ (более подробно нужные выкладки проведены в [12]). В то же время практически очевидно, что $\chi(G) \geqslant \dfrac{|V|}{\alpha(G)}$ для любого графа $G = (V, E)$. В нашем случае, стало быть,

$$\chi(G_n(a,b)) \geqslant \frac{(\beta(a,b)+o(1))^n}{(\gamma(a,b)+o(1))^n} = \left(\frac{\beta(a,b)}{\gamma(a,b)} + o(1)\right)^n.$$

Как доказано все в тех же [3, 12], значение

$$\max_{a,b} \frac{\beta(a,b)}{\gamma(a,b)}$$

достигается при $a_0 = 0.36063\ldots$ и $b_0 = 0.063\ldots$ (a_0 и b_0 служат решениями некоторой системы трансцендентных уравнений), и оно *в точности* равно ζ. Если бы было заодно выполнено неравенство $\omega(G_n) \leqslant k$, то говорить было бы дальше не о чем. Однако в графах G_n полно k-клик.

Применим вероятностный метод. Рассмотрим $G_n = G_n(a_0, b_0)$. Пусть $\beta = \beta(a_0, b_0)$, $\gamma = \gamma(a_0, b_0)$, $N = |V_n(a_0, b_0)|$. Положим $\rho = N^{-3/k}$. Поскольку, очевидно, $\rho \in (0, 1]$, эту величину можно интерпретировать как вероятность. А именно, мы будем удалять ребра графа G_n независимо друг от друга с вероятностью $1-\rho$. Получится случайный граф. Если мы докажем, что с положительной вероятностью у этого графа нет k-клик и его число независимости не превосходит $(\gamma+o(1))^n$, то мы найдем нужный нам граф и теорема будет доказана.

Положим

$$l = \left[5\frac{\alpha(G_n)}{\rho}\ln N\right] + 1 \geqslant 5\frac{\alpha(G_n)}{\rho}\ln N.$$

Имеем

$$l \sim 5\alpha(G_n)N^{3/k}\ln N \leqslant 5N^{3/k}(\ln N)(\gamma+o(1))^n = (\beta+o(1))^{3n/k}(\gamma+o(1))^n = (\gamma+o(1))^n,$$

т.к. $k \to \infty$ (разумеется, здесь все величины $o(1)$ разные).

Докажем, что с положительной вероятностью у случайного графа G одновременно $\omega(G) < k$ и $\alpha(G) < l$. Ясно, что этого хватит для завершения доказательства теоремы.

Обозначим через X_n число k-клик в случайном графе, а через Y_n — число независимых множеств размера l в нем. Ввиду неравенства Маркова достаточно получить оценки $MX_n < \frac{1}{2}$ и $MY_n < \frac{1}{2}$ при больших n, где M — математическое ожидание. Имеем

$$MX_n \leqslant C_N^k \rho^{C_k^2} \leqslant N^k \rho^{\frac{k(k-1)}{2}} = N^k \cdot N^{-1.5(k-1)} \to 0.$$

Вместе с тем

$$MY_n = \sum_{A \subset V_n,\ |A|=l} (1-\rho)^{|\{\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}\in E_n:\ \mathbf{x},\mathbf{y}\in A\}|}.$$

В работе [7] доказана оценка

$$|\{\{\mathbf{x},\mathbf{y}\} \in E_n : \ \mathbf{x},\mathbf{y} \in A\}| \geqslant \frac{l^2}{4\alpha(G_n)}.$$

Из нее следует, что

$$MY_n \leqslant C_N^l (1-\rho)^{\frac{l^2}{4\alpha(G_n)}} \leqslant N^l e^{-\frac{\rho l^2}{4\alpha(G_n)}} = e^{l \ln N - \frac{\rho l^2}{4\alpha(G_n)}}.$$

Но

$$\frac{\rho l}{4\alpha(G_n)} \geqslant 1.25 \ln N,$$

так что

$$l \ln N - \frac{\rho l^2}{4\alpha(G_n)} \leqslant -0.25 l \ln N \to -\infty, \quad MY_n \to 0,$$

и теорема доказана.

Литература

1. *Erdős P.* Graph theory and probability // Canadian Mathematical Bullettin.— 1959.— V. 11.— P. 34—38.
2. *de Bruijn N. G.*, *Erdős P.* A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations // Proc. Koninkl. Nederl. Acad. Wet. Ser. A. — 1951. — V. 54, N 5. — P. 371–373.
3. *Райгородский А. М.* О хроматическом числе пространства // УМН. — 2000. — Т. 55, вып. 2. — С. 147–148.
4. *Larman D. G.*, *Rogers C. A.* The realization of distances within sets in Euclidean space // Mathematika. — 1972. — V. 19. — P. 1–24.
5. *Райгородский А. М.* О дистанционных графах с большим хроматическим числом, не содержащих больших симплексов // УМН. — 2007.— Т. 62, вып. 6.— С. 187—188.
6. *Raigorodskii A. M.*, *Rubanov O. I.* On the clique and the chromatic numbers of high-dimensional distance graphs // Number Theory and Applications: Proceedings of the International Conferences on Number Theory and Cryptography — S.D. Adhikari and B. Ramakrishnan, Harish-Chandra Research Institute, Editors — A publication of Hindustan Book Agency.— 2009.— P. 149—157.
7. *Райгородский А. М.*, *Рубанов О. И.* О графах расстояний с большим хроматическим числом и без больших клик // Матем. заметки.— 2010.— Т. 87, № 3.— С. 417—428.
8. *Демехин Е. Е.*, *Райгородский А. М.*, *Рубанов О. И.* Графы расстояний, имеющие большие хроматические числа и не содержащие клик или циклов заданного размера // Матем. сборник.— Принято в печать.
9. *Райгородский А. М.* Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // УМН. — 2001.— Т. 56, вып. 1. — С. 107–146.
10. *Székely L. A.* Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems // J. Bolyai Math. Soc. — 2002. — V. 11. — P. 649–666.
11. *Райгородский А. М.* Хроматические числа. — М.: МЦНМО, 2003.
12. *Райгородский А. М.* Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. — М.: МЦНМО, 2007.

13. *Agarwal P. K.*, *Pach J.* Combinatorial geometry. — New York: John Wiley and Sons Inc., 1995.
14. *Klee V.*, *Wagon S.* Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory. — Math. Association of America, 1991.
15. *Brass P., Moser W., Pach J.* Research problems in discrete geometry. — Berlin: Springer, 2005.
16. *Soifer A.* The Mathematical Coloring Book. — Springer, 2009.

Поступила в редакцию 10.06.2011