

Раздел IV

Раскраски гиперграфов

УДК 519.112.7 + 519.174 + 519.179.1

Д. А. Шабанов

Кафедра дискретной математики факультета инноваций и высоких технологий МФТИ;
Кафедра теории вероятностей механико-математического факультета
МГУ им. М. В. Ломоносова;
Отдел теоретических и прикладных исследований, ООО «Яндекс»

Об одном обобщении задачи Эрдеша–Ловаса

Исследуется обобщение классической задачи Эрдеша–Ловаса, связанное с раскрасками неоднородных гиперграфов. Пусть $H = (V, E)$ — произвольный гиперграф с минимальной мощностью ребра n и обхватом не меньше 4. В работе получено новое достаточное условие r -раскрашиваемости гиперграфа H в терминах ограничения на функцию $f_r(H) = \sum_{e \in E} r^{1-|e|}$.

Ключевые слова: раскраски гиперграфов, задача Эрдеша–Ловаса, гиперграфы с большим обхватом.

1. Введение и история задачи

В работе исследуется обобщение классической задачи Эрдеша–Ловаса, относящейся к экстремальной теории гиперграфов. Сначала мы напомним основные определения.

Гиперграфом называется пара множеств $H = (V, E)$, где $V = V(H)$ есть некоторое конечное множество, называемое *множеством вершин* гиперграфа, а $E = E(H)$ есть совокупность подмножеств множества V , и эти подмножества называются *ребрами* гиперграфа. Гиперграф является *n -однородным*, если каждое его ребро содержит ровно n вершин. *Простым циклом* длины s в гиперграфе $H = (V, E)$ называется последовательность $(A_0, v_0, A_1, \dots, A_{s-1}, v_{s-1}, A_s)$, где A_0, \dots, A_{s-1} — различные ребра H , ребро A_s совпадает с A_0 , а v_0, \dots, v_{s-1} — различные вершины H , причем $v_i \in A_i \cap A_{i+1}$ для всех $i = 0, \dots, s-1$. *Обхватом* гиперграфа H называется длина минимального простого цикла в H . Обхват гиперграфа H мы будем обозначать через $\text{girth}(H)$.

Раскраска множества вершин V гиперграфа $H = (V, E)$ называется *правильной*, если в этой раскраске все ребра из $E(H)$ не являются одноцветными. *Хроматическим числом* гиперграфа H называется минимальное число цветов, требуемое для правильной раскраски вершин этого гиперграфа. Мы будем обозначать хроматическое число гиперграфа H через $\chi(H)$. Если $\chi(H) \leq r$, то говорят, что H является *r -раскрашиваемым*.

Одной из центральных проблем теории раскрасок гиперграфов является экстремальная задача Эрдеша–Хайнала. В 1961 году П. Эрдеш и А. Хайнал поставили (см. [1]) вопрос о нахождении величины $m(n)$, равной *минимально возможному количеству ребер гиперграфа в классе n -однородных гиперграфов с хроматическим числом больше двух*. Формально определение $m(n)$ можно записать так:

$$m(n) = \min \{ |E(H)| : H \text{ — } n\text{-однородный гиперграф, } \chi(H) > 2 \}.$$

Первые нетривиальные результаты о величине $m(n)$ были получены самим Эрдешем (см. [2, 3]) в 1963–64-м гг. Он показал, что выполняются неравенства

$$2^{n-1} \leq m(n) \leq e(\ln 2)n^2 2^{n-2}(1 + o(1)). \quad (6)$$

Исследованию проблемы Эрдеша–Хайнала о величине $m(n)$, а также ее обобщениям для различных классов однородных гиперграфов посвящено огромное количество работ. Подробнее об известных результатах в этой области можно прочитать, например, в обзорах [4, 5]. Мы же в свою очередь отметим, что верхняя оценка Эрдеша из (6) так и остается асимптотически наилучшей на сегодняшний день.

Нетривиальное обобщение задачи Эрдеша–Хайнала для неоднородных гиперграфов было предложено Эрдешем и Л. Ловасом в 1973 году в работе [6]. Пусть $H = (V, E)$ — произвольный гиперграф. Обозначим через $e(H)$ минимальную мощность ребра в этом гиперграфе, т.е.

$$e(H) = \min \{|e| : e \in E\},$$

а также введем функцию $f(H)$ по правилу

$$f(H) = \sum_{e \in E} 2^{-|e|}.$$

Задача, предложенная Эрдешем и Ловасом, состоит в том, чтобы найти минимальное значение функции $f(H)$ в классе гиперграфов H , удовлетворяющих условиям $e(H) = n$, $\chi(H) > 2$. Искомое значение они обозначили через $f(n)$. Таким образом,

$$f(n) = \min \{f(H) : H \text{ — гиперграф, } e(H) = n, \chi(H) > 2\}.$$

Поймем, как величина $f(n)$ связана с задачей Эрдеша–Хайнала. Если $H = (V, E)$ — n -однородный гиперграф, то для него $f(H) = |E|2^{-n}$. Значит, имеет место следующее соотношение между $f(n)$ и классической величиной $m(n)$:

$$f(n) \leq m(n)2^{-n}.$$

Используя это соотношение, из оценки (6) Эрдеша для $m(n)$ мы получаем верхнюю оценку для $f(n)$:

$$f(n) \leq \frac{e \ln 2}{4} n^2(1 + o(1)).$$

Эрдеш и Ловас отметили, что простейшее применение вероятностных соображений дает нижнюю оценку $f(n) \geq 1/2$, и поставили следующий вопрос: *верно ли, что $f(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$?*

Положительный ответ на этот вопрос был получен Й. Беком в 1978 году (см. [7]), однако доказанная им нижняя оценка является весьма слабой. Введем последовательность функций: $g_0(x) = x$ и $g_k(x) = \log_2(g_{k-1}(x))$ для всех $k \geq 1$. Для любого положительного x положим

$$\log^*(x) = \min \{k : g_k(x) \leq 1\}.$$

С помощью введенной функции $\log^*(x)$ оценка Бека может быть записана следующим образом:

$$f(n) \geq \frac{\log^*(n) - 100}{7}. \quad (7)$$

Данное неравенство, безусловно, положительно отвечает на вопрос Эрдеша и Ловаса, но сама оценка очень медленно растет, ведь, по сути, $\log^*(n)$ — это функция, обратная к функции, сопоставляющей натуральному числу n башню из n двоек.

Качественное улучшение оценки (7) было получено Л. Лю (см. [8]), который обосновал следующую теорему.

Теорема 1. (Л. Лю, [8]) Для любого $\varepsilon \in (0, 1/16)$ существует такое $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство

$$f(n) \geq \left(\frac{1}{16} - \varepsilon\right) \frac{\ln n}{\ln \ln n}. \quad (8)$$

Ясно, что неравенство (8) улучшает результат Бека (7). Кроме того, Лю в своей работе [8] рассмотрел естественное обобщение задачи о величине $f(n)$, связанное с r -раскрашиваемостью неоднородных гиперграфов для произвольного $r \geq 2$. Он доказал следующее утверждение.

Теорема 2. (Л. Лю, [8]) Для любых $r \geq 2$ и $\varepsilon \in (0, (r-1)/4r^2)$ существует такое $n_0 = n_0(\varepsilon, r)$, что для всех $n > n_0$ и любого гиперграфа $H = (V, E)$ с условиями $e(H) = n$ и

$$\sum_{e \in E} r^{-|e|} \leq \left(\frac{r-1}{4r^2} - \varepsilon\right) \frac{\ln n}{\ln \ln n}$$

выполнено $\chi(H) \leq r$.

В настоящей работе получено существенное усиление теоремы 2 для гиперграфов с большим обхватом. Точная формулировка звучит следующим образом.

Теорема 3. Пусть $n \geq 3$, $r \geq 2$, а $H = (V, E)$ — произвольный гиперграф с условиями $e(H) = n$ и $\text{girth}(H) > 3$. Если, кроме того, выполняется неравенство

$$\sum_{e \in E} r^{1-|e|} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{2/3}, \quad (9)$$

то H является r -раскрашиваемым.

Сравним результаты теорем 3 и 2. Фактически, в теореме 2 сказано, что если $e(H) = n$ и сумма $\sum_{e \in E} r^{1-|e|}$ имеет порядок роста $O\left(\frac{\ln n}{\ln \ln n}\right)$, то гиперграф H является r -раскрашиваемым. В нашей же теореме 3 утверждается, что если есть дополнительное ограничение на обхват гиперграфа, $\text{girth}(H) > 3$, то сумма $\sum_{e \in E} r^{1-|e|}$ может уже иметь гораздо больший

порядок роста: $O\left(\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{2/3}\right)$, — а гиперграф H по-прежнему будет r -раскрашиваемым.

Более того, наша теорема выполнена для всех $r \geq 2$ и $n \geq 3$, в то время как в теореме Лю требуется, чтобы r было маленьким по сравнению с n (фиксированным в асимптотике).

Далее мы приведем доказательство теоремы 3.

2. Доказательство основного результата

Итак, пусть задан гиперграф $H = (V, E)$, удовлетворяющий условиям теоремы 3. Нам необходимо доказать существование правильной раскраски в r цветов (r -раскраски) для H . Для этого мы построим некоторую случайную r -раскраску и покажем, что в условиях теоремы 3 она является правильной для H с положительной вероятностью.

2.1. Рандомизированный алгоритм раскраски

Без ограничения общности мы можем считать, что $V = \{1, \dots, w\}$. Опишем алгоритм случайной раскраски, который состоит из двух этапов: основной раскраски и процедуры перекраски.

Первый этап. Основная раскраска. На первом этапе мы осуществляем случайную равномерную раскраску множества вершин: присваиваем каждой вершине, независимо от всех остальных вершин, любой из r цветов с одной и той же вероятностью $1/r$. Полученную случайную раскраску обозначаем через χ_0 и называем ее *основной раскраской*.

Раскраска χ_0 может содержать одноцветные и «почти одноцветные» ребра. Назовем ребро $e \in E$ *почти одноцветным* в раскраске χ_0 , если найдется такой цвет u , что

$$|\{v \in e : v \text{ покрашено в цвет } u \text{ в } \chi_0\}| = |e| - 1,$$

т.е. есть ровно одна вершина в ребре e , которая не покрашена в цвет u в раскраске χ_0 . В этом случае назовем цвет u *доминирующим* в ребре e . Для каждой вершины $v \in V$ и цвета $u = 1, \dots, r$ введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(v) &= \{e \in E : v \in e, e \text{ одноцветно в } \chi_0\}, \\ \mathcal{AM}(v, u) &= \{e \in E : v \in e, e \text{ почти одноцветно в } \chi_0 \text{ с доминирующим} \\ &\quad \text{цветом } u, v \text{ — единственная вершина } e, \text{ не покрашенная в } u \text{ в } \chi_0\}. \end{aligned}$$

Второй этап. Процедура перекраски. На втором этапе мы попытаемся перекрасить некоторые вершины из ребер, которые были одноцветны в χ_0 . Пусть $\{\eta_1, \dots, \eta_w\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения $1, \dots, r$ с одной и той же вероятностью p (это параметр нашей конструкции) и значение 0 с вероятностью $1 - rp$. Процедура перекраски будет состоять из w шагов. Мы рассмотрим все вершины гиперграфа H по одной, согласно произвольной фиксированной нумерации σ множества вершин V (например, мы можем взять естественный порядок вершин $V = \{1, 2, \dots, w\}$).

Шаг № k процедуры перекраски. Пусть раскраска χ_{k-1} уже построена. На k -м шаге мы рассматриваем вершину $v \in V$, имеющую номер k согласно нумерации σ , т.е. $\sigma(v) = k$. Предположим, что выполнены следующие два условия.

- Нашлось некоторое ребро $e \in \mathcal{M}(v)$, в котором в течение всех предыдущих шагов процедуры (с 1 по $k - 1$) ни одна из вершин не сменила свой изначальный цвет.
- Не нашлось таких $u \in \{1, \dots, r\}$ и $f \in \mathcal{AM}(v, u)$, что
 1. $\eta_v = u$;
 2. v все еще остается единственной вершиной ребра f , которая не покрашена в цвет u (т.е. v является единственной вершиной ребра f , которая не покрашена в цвет u в раскраске χ_{k-1}). Другими словами, f все еще почти одноцветно (т.е. почти одноцветно в χ_{k-1}) с доминирующим цветом u и ни одна из вершин этого ребра не сменила свой цвет на шагах процедуры с 1 по $k - 1$.

Тогда мы случайным образом перекрашиваем вершину v в соответствии со значением случайной величины η_v :

- если $\eta_v = 0$, то не перекрашиваем v ,
- если $\eta_v \neq 0$, то присваиваем v цвет η_v .

Во всех других ситуациях, т.е. когда одно из условий не выполнено, мы не меняем цвет v . Обозначаем через χ_k случайную раскраску, получающуюся после рассмотрения вершины v .

Всего мы совершаем w шагов процедуры перекраски, поэтому раскраску χ_w естественно назвать *финальной раскраской*. Нам необходимо оценить вероятность события

$$\mathcal{F} = \{H \text{ содержит одноцветные ребра в } \chi_w\}.$$

Далее мы приведем формальную конструкцию случайной раскраски χ_w .

2.2. Формальная конструкция случайной раскраски

Напомним, что $V = \{1, \dots, w\}$. Пусть на некотором вероятностном пространстве задан следующий набор независимых в совокупности случайных величин.

1. ξ_1, \dots, ξ_w — одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения $1, 2, \dots, r$ с равной вероятностью $1/r$.
2. η_1, \dots, η_w — одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения $1, 2, \dots, r$ с одной и той же вероятностью p , а также значение 0 с вероятностью $1 - rp$.

Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_w)$ можно интерпретировать как случайную r -раскраску множества вершин V с равномерным распределением (мы присваиваем цвет ξ_i вершине i). Она соответствует основной раскраске χ_0 из нашего алгоритма. Случайная же величина η_v в свою очередь соответствует результату случайного перекрашивания вершины v во время ее рассмотрения. В течение процедуры перекраски мы будем использовать естественную нумерацию множества вершин V .

Пусть $e \in E$ — произвольное ребро гиперграфа H . Для каждого $u = 1, \dots, r$ введем обозначения $\mathcal{M}(e, u)$ и $\mathcal{AM}(e, u)$ для следующих событий:

$$\mathcal{M}(e, u) = \bigcap_{s \in e} \{\xi_s = u\}, \quad \mathcal{AM}(e, u) = \left\{ \sum_{s \in e} I\{\xi_s \neq u\} = 1 \right\}.$$

Ясно, что событие $\mathcal{M}(e, u)$ состоит в том, что ребро e является одноцветным цвета u в раскраске ξ , а событие $\mathcal{AM}(e, u)$ — в том, что e почти одноцветно в ξ с доминирующим цветом u .

Для каждой вершины v и каждого цвета u обозначим через $\mathcal{BL}(v, u)$, $\mathcal{BL}(v)$ и $\mathcal{R}(v)$ следующие события:

$$\begin{aligned} \mathcal{BL}(v, u) &= \bigcup_{e \in E: v \in e} (\mathcal{AM}(e, u) \cap \{\xi_v \neq u, \eta_v = u\}), \quad \mathcal{BL}(v) = \bigcup_{a=1}^r \mathcal{BL}(v, a), \\ \mathcal{R}(v) &= \bigcup_{e \in E: v \in e} \bigcup_{u=1}^r \left(\mathcal{M}(e, u) \cap \left\{ \sum_{s \in e} I\{s < v, \eta_s \notin \{0, u\}, \overline{\mathcal{BL}(s)}\} = 0 \right\} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Легко понять, что событие $\mathcal{BL}(v, u)$ состоит в том, что потенциальная перекраска вершины v в цвет u «запрещается» некоторым почти одноцветным ребром, в котором v является единственной вершиной, не покрашенной в цвет u в основной раскраске ξ . Событие же $\mathcal{R}(v)$ состоит в том, что вершину v следует попытаться перекрасить: есть некоторое одноцветное в основной раскраске ξ ребро e , содержащее v , в котором до рассмотрения v не произошло никакого перекрашивания, т.е. не нашлось такой вершины s , что $s < v$, ее перекраска не была запрещена (не выполнено событие $\mathcal{BL}(s)$) и она действительно изменила свой цвет ($\eta_s \notin \{0, \xi_s\}$).

Введем случайные величины ζ_i , $i = 1, \dots, w$, по следующему правилу:

$$\zeta_i = \xi_i I \left\{ \overline{\mathcal{R}(i)} \cup \{\eta_i = 0\} \cup \mathcal{BL}(i) \right\} + \eta_i I \left\{ \mathcal{R}(i) \cap \{\eta_i \neq 0\} \cap \overline{\mathcal{BL}(i)} \right\}. \quad (11)$$

Ясно, что случайные величины ζ_i принимают только значения из множества $\{1, 2, \dots, r\}$. Следовательно, мы можем интерпретировать случайный вектор $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_w)$ как случайную r -раскраску множества вершин V (вершине i мы присваиваем цвет ζ_i). Обозначим через \mathcal{F} событие, состоящее в том, что ζ не является правильной раскраской для гиперграфа H :

$$\mathcal{F} = \bigcup_{e \in E} \bigcup_{u=1}^r \bigcap_{s \in e} \{\zeta_s = u\}. \quad (12)$$

Наша задача состоит в том, чтобы при некотором выборе параметра p в условиях теоремы 3 обосновать неравенство $P(\mathcal{F}) < 1$.

2.3. Анализ плохих событий

Любое ребро $e \in E$ может стать одноцветным в финальной раскраске ζ тремя различными путями.

1. Оно было одноцветным цвета u в основной раскраске ξ и стало одноцветным другого цвета a в финальной раскраске ζ . Обозначим такое событие через $\mathcal{A}(e, u, a)$.
2. Оно было одноцветным цвета u в основной раскраске ξ и осталось таковым в финальной раскраске ζ . Обозначим такое событие через $\mathcal{B}(e, u)$.
3. Оно не было одноцветным в основной раскраске ξ и стало одноцветным цвета u в финальной раскраске ζ . Обозначим это событие через $\mathcal{C}(e, u)$.

Следовательно,

$$\mathcal{F} = \bigcup_{e \in E} \bigcup_{u=1}^r \left(\bigcup_{a=1, a \neq u}^r \mathcal{A}(e, u, a) \cup \mathcal{B}(e, u) \cup \mathcal{C}(e, u) \right). \quad (13)$$

Мы рассмотрим эти три события по отдельности.

Первое плохое событие. В силу своего определения событие $\mathcal{A}(e, u, a)$ представляется в виде

$$\mathcal{A}(e, u, a) = \bigcap_{s \in e} \{\xi_s = u, \zeta_s = a\}.$$

Для каждой вершины s из неравенства $\zeta_s \neq \xi_s$ следует, что $\zeta_s = \eta_s$. Значит, имеет место вложение

$$\mathcal{A}(e, u, a) \subset \bigcap_{s \in e} \{\xi_s = u, \eta_s = a\}.$$

Вероятность же последнего события легко считается:

$$P(\mathcal{A}(e, u, a)) \leq P \left(\bigcap_{s \in e} \{\xi_s = u, \eta_s = a\} \right) = \prod_{s \in e} P(\xi_s = u, \eta_s = a) = \left(\frac{p}{r} \right)^{|e|}. \quad (14)$$

Второе плохое событие. В силу своего определения событие $\mathcal{B}(e, u)$ формально записывается следующим образом:

$$\mathcal{B}(e, u) = \bigcap_{s \in e} \{\xi_s = u, \zeta_s = u\}.$$

Несложно понять, что из события $\mathcal{B}(e, u)$ вытекают события $\mathcal{R}(s)$ для всех $s \in e$. Действительно, пусть v — это первая вершина (согласно естественной нумерации множества вершин) в ребре e с условиями: $\eta_v \notin \{0, u\}$ и выполнено событие $\mathcal{BL}(v)$. В этой ситуации, конечно, выполнено событие $\mathcal{R}(v)$ (см. (10)), но в силу определения случайной величины ζ_v (см. (11)) мы получаем соотношения $\zeta_v = \eta_v \neq u = \xi_v$, что противоречит событию $\mathcal{B}(e, u)$. Таким образом, из $\mathcal{B}(e, u)$ вытекают события $\{\eta_s \notin \{0, u\}\} \cup \mathcal{BL}(s)$ для всех $s \in e$. Значит, из него следуют и все события $\mathcal{R}(s)$ для каждого $s \in e$.

Когда происходит событие $\mathcal{R}(s)$, равенство $\zeta_s = \xi_s = u$ может получиться только двумя способами: либо $\eta_s \in \{0, u\}$, либо $\eta_s \notin \{0, u\}$ и произошло событие $\mathcal{BL}(s)$. Во втором случае должно существовать такое ребро $f \in E$, что, во-первых, $s \in f \cap e$, во-вторых, f является почти одноцветным в основной раскраске ξ с доминирующим цветом $a \neq u$, в-третьих, s — единственная вершина f , которая не покрашена в цвет a в ξ , и, наконец, в-четвертых, мы должны перекрасить s именно в цвет a , т.е. $\eta_s = a$.

Предположим, что в точности t вершин v_1, \dots, v_t ребра e удовлетворяют условию $\eta_{v_i} \notin \{0, u\}$. Тогда в силу предыдущих рассуждений мы получаем, что существуют такие ребра f_1, \dots, f_t , что

- $f_i, i = 1, \dots, t$, почти одноцветно в ξ с доминирующим цветом $a_i \neq u$,
- f_i пересекает e по единственной вершине v_i (напомним, что $girth(H) > 3$, а значит, этот гиперграф простой, т.е. любые два его ребра имеют не более одной общей вершины),
- $\eta_{v_i} = a_i$ для всех $i = 1, \dots, t$,
- $\eta_s \in \{0, u\}$ для всех $s \in e \setminus \{v_1, \dots, v_t\}$.

Следовательно, выполнение $\mathcal{B}(e, u)$ влечет выполнение для некоторого t и некоторого набора ребер $\{f_1, \dots, f_t\}$ следующего события:

$$\mathcal{B}(e, u, f_1, \dots, f_t) = \mathcal{M}(e, u) \cap \bigcap_{s \in e \setminus \{v_1, \dots, v_t\}} \{\eta_s \in \{0, u\}\} \cap \left(\bigcup_{\substack{a_1, \dots, a_t \\ a_j \neq u}} \bigcap_{i=1}^t \{\mathcal{AM}(f_i, a_i) \cap \{\eta_{v_i} = a_i\}\} \right), \quad (15)$$

где v_1, \dots, v_t — различные вершины ребра e и v_i — единственная вершина в пересечении e и f_i . Заметим, что в силу ограничения $girth(H) > 3$ ребра f_1, \dots, f_t вообще не имеют общих вершин, а потому вероятность события $\mathcal{B}(e, u, f_1, \dots, f_t)$ легко вычисляется. В силу (15) получаем:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\mathcal{B}(e, u, f_1, \dots, f_t)) = \\ & = \mathbb{P}(\mathcal{M}(e, u)) \prod_{s \in e \setminus \{v_1, \dots, v_t\}} \mathbb{P}(\eta_s \in \{0, u\}) \sum_{\substack{a_1, \dots, a_t \\ a_j \neq u}} \prod_{i=1}^t \mathbb{P} \left(\left\{ \bigcap_{s \in f_i \setminus \{v_i\}} \{\xi_s = a_i\} \right\} \cap \{\eta_{v_i} = a_i\} \right) = \\ & = r^{-|e|} (1 - (r - 1)p)^{|e| - t} (r - 1)^t r^{t - \sum_{i=1}^t |f_i|} p^t = r^{-|e|} r^{t - \sum_{i=1}^t |f_i|} (1 - q)^{|e| - t} q^t. \quad (16) \end{aligned}$$

Здесь мы использовали обозначение $q = (r - 1)p$.

Осталось оценить вероятность события $\mathcal{B}(e, u)$. Напомним, что из него вытекает, для некоторого $t \geq 0$ и некоторого набора ребер f_1, \dots, f_t , событие $\mathcal{B}(e, u, f_1, \dots, f_t)$. Следовательно,

$$\mathcal{B}(e, u) \subset \bigcup_{t=0}^{|e|} \bigcup_{f_1, \dots, f_t \in E} \mathcal{B}(e, u, f_1, \dots, f_t).$$

Отсюда с учетом начального условия (9) и неравенства (16) получаем следующую верхнюю оценку вероятности события $\mathcal{B}(e, u)$:

$$\begin{aligned} P(\mathcal{B}(e, u)) &\leq \sum_{t=0}^{|e|} \sum_{f_1, \dots, f_t \in E} P(\mathcal{B}(e, u, f_1, \dots, f_t)) \leq \sum_{t=0}^{|e|} \sum_{f_1, \dots, f_t \in E} r^{-|e|} r^{t - \sum_{i=1}^t |f_i|} (1 - q)^{|e| - t} q^t \leq \\ &\leq \sum_{t=0}^{|e|} r^{-|e|} (1 - q)^{|e| - t} q^t \left(\frac{1}{2} \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{2/3} \right)^t. \quad (17) \end{aligned}$$

Третье плохое событие. Нам осталось рассмотреть только событие $\mathcal{C}(e, u)$. Согласно своему определению это событие формально записывается следующим образом:

$$\mathcal{C}(e, u) = \bigcup_{a=1}^r \overline{\mathcal{M}(e, a)} \cap \bigcap_{s \in e} \{\zeta_s = u\},$$

т.е. в основной раскраске ребро e не было одноцветным, но стало таковым цвета u в финальной раскраске ζ . Это означает, в частности, что ребро e содержало вершины других цветов, кроме u , и все эти вершины перекрасились в u во время процедуры перекраски. Сколько таких вершин могло быть? Если такая вершина v была бы ровно одна, то ребро было бы почти одноцветным с доминирующим цветом u . Тогда мы не смогли бы перекрасить v в цвет u , потому что было бы выполнено событие $\mathcal{BL}(v)$, в результате которого $\zeta_v = \xi_v \neq u$. Таким образом, подобных вершин должно было быть по крайней мере две.

Пусть $T = \{s \in e : \xi_s \neq u\}$. Тогда для каждого $s \in T$ будет выполнено равенство $\eta_s = u$, а также событие $\mathcal{R}(v)$. Пусть v_1, \dots, v_t — все элементы T . Из события $\mathcal{R}(v_i)$ в свою очередь вытекает одно из событий $\mathcal{M}(f_i, a_i)$, где f_i — некоторое ребро E , содержащее v_i и отличное от e (т.к. e не является одноцветным в ξ). В итоге мы получаем следующее соотношение для события $\mathcal{C}(e, u)$:

$$\mathcal{C}(e, u) \subset \bigcup_{t=2}^{|e|} \bigcup_{f_1, \dots, f_t \in E} \bigcup_{\substack{a_1, \dots, a_t=1: \\ a_j \neq u}}^r \left(\bigcap_{s \in e \setminus \{v_1, \dots, v_t\}} \{\xi_s = u\} \cap \bigcap_{s \in \{v_1, \dots, v_t\}} \{\eta_s = u\} \cap \bigcap_{i=1}^t \mathcal{M}(f_i, a_i) \right), \quad (18)$$

где v_i — вершина из пересечения f_i с e . В силу условия $\text{girth}(H) > 3$ каждое из ребер f_1, \dots, f_t имеет ровно одну общую вершину с e , а потому v_i однозначно определяется ребром f_i и мы не берем объединение по ним в формуле (18). Кроме того, из условия на обхват следует, что ребра f_1, \dots, f_t попарно не пересекаются. Значит, из (18) мы получаем следующую оценку вероятности события $\mathcal{C}(e, u)$:

$$P(\mathcal{C}(e, u)) \leq \sum_{t=2}^{|e|} \sum_{f_1, \dots, f_t \in E} \sum_{\substack{a_1, \dots, a_t=1: \\ a_j \neq u}}^r r^{t - |e|} p^t \prod_{i=1}^t r^{-|f_i|}.$$

Данное неравенство, с учетом начального условия (9), дает окончательную верхнюю оценку величины $P(\mathcal{C}(e, u))$:

$$P(\mathcal{C}(e, u)) \leq r^{-|e|} \sum_{t=2}^{|e|} q^t \prod_{i=1}^t \left(\sum_{f_i \in E} r^{1-|f_i|} \right) \leq r^{-|e|} \sum_{t=2}^{|e|} q^t \left(\frac{1}{2} \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{2/3} \right)^t. \quad (19)$$

2.4. Выбор параметров и завершение доказательства

В предыдущем параграфе мы оценили вероятности событий $\mathcal{A}(e, u, a)$, $\mathcal{B}(e, u)$ и $\mathcal{C}(e, u)$. Вспоминая про соотношение (13), мы получаем следующее неравенство для вероятности события \mathcal{F} :

$$P(\mathcal{F}) \leq \sum_{e \in E} \sum_{u=1}^r \left(P(\mathcal{B}(e, u)) + P(\mathcal{C}(e, u)) + \sum_{a=1: a \neq u}^r P(\mathcal{A}(e, u, a)) \right).$$

Для удобства и сокращения записи введем обозначение $L = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{2/3}$. Тогда, используя начальное ограничение (9), а также обоснованные ранее оценки (14), (17) и (19), имеем следующее неравенство:

$$P(\mathcal{F}) \leq \sum_{e \in E} \sum_{u=1}^r \left[\left(\sum_{t=0}^{|e|} r^{-|e|} (1-q)^{|e|-t} (qL)^t \right) + \left(r^{-|e|} \sum_{t=2}^{|e|} (qL)^t \right) + \sum_{a=1: a \neq u} \left(\frac{p}{r} \right)^{|e|} \right]. \quad (20)$$

Нам нужно выбрать значение параметра p . Положим $q = \frac{2 \ln n}{3n}$. Ясно, что при всех $n \geq 3$ выполнено $q < \frac{1}{2}$. Тогда параметр $p = q/(r-1)$ будет удовлетворять необходимому условию $p \in (0, 1/r)$. Далее, нам понадобится пара простых неравенств для величин q и L :

$$qL \leq \frac{1}{3} \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{1/3} \leq \frac{1}{3}, \text{ и, значит, } (1 - qL)^{-1} \leq \frac{3}{2}; \quad (21)$$

$$q \leq \frac{2 \ln 3}{3 \cdot 3} = \frac{2 \ln 3}{9} \leq \frac{1}{4}, \text{ и, значит, } \left(1 - \frac{qL}{1-q} \right)^{-1} \leq \frac{9}{5}. \quad (22)$$

Оценим по отдельности слагаемые в правой части (20). Из условий (9) и $e(H) = \min_{e \in E} |e| = n$, выбора параметра q , а также (22) получаем оценку первого слагаемого:

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E} \sum_{u=1}^r \left(\sum_{t=0}^{|e|} r^{-|e|} (1-q)^{|e|-t} (qL)^t \right) &= \sum_{e \in E} r^{1-|e|} \left(\sum_{t=0}^{|e|} (1-q)^{|e|-t} (qL)^t \right) \leq \\ &\leq (1-q)^n \sum_{e \in E} r^{1-|e|} \left(\sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{qL}{1-q} \right)^t \right) \leq (1-q)^n L \left(1 - \frac{qL}{1-q} \right)^{-1} \leq \frac{9}{5} e^{-qn} L = \frac{9}{5} n^{-2/3} L \leq \frac{9}{10}. \end{aligned} \quad (23)$$

Второе слагаемое оценивается похожим образом, только мы используем (21) вместо (22):

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E} \sum_{u=1}^r \left(r^{-|e|} \sum_{t=2}^{|e|} (qL)^t \right) &= \sum_{e \in E} r^{1-|e|} \left(\sum_{t=2}^{|e|} (qL)^t \right) \leq \sum_{e \in E} r^{1-|e|} \left(\sum_{t=2}^{\infty} (qL)^t \right) \leq \\ &\leq q^2 L^3 (1 - qL)^{-1} = \left(\frac{2}{3} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^3 (1 - qL)^{-1} \leq \frac{1}{12}. \end{aligned} \quad (24)$$

Осталось рассмотреть третье слагаемое из выражения в правой части (20):

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E} \sum_{u=1}^r \left(\sum_{a=1: a \neq u} \binom{p}{r}^{|e|} \right) &\leq (r-1)p^n \sum_{e \in E} r^{1-|e|} \leq q^n L \leq \\ &\leq q^3 L = q^2(qL) \leq \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{1/3} \leq \frac{1}{48} \left(\frac{\ln 3}{3} \right)^{1/3}. \end{aligned} \quad (25)$$

В последней цепочке соотношений мы активно пользовались условием теоремы $n \geq 3$.

Подведем итоги. Из неравенств (20), (23), (24) и (25) мы получаем окончательную оценку вероятности события \mathcal{F} :

$$P(\mathcal{F}) \leq \frac{9}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{48} \left(\frac{\ln 3}{3} \right)^{1/3} < 1.$$

Следовательно, с положительной вероятностью случайная раскраска ζ является правильной r -раскраской для гиперграфа H . Значит, H является r -раскрашиваемым. Теорема 3 доказана.

Литература

1. Erdős P., Hajnal A. On a property of families of sets // Acta Mathematica of the Academy of Sciences, Hungary. — 1961. — V. 12, N 1–2. — P. 87–123.
2. Erdős P. On a combinatorial problem, I // Nordisk Mat. Tidskrift. — 1963. — V. 11. — P. 5–10.
3. Erdős P. On a combinatorial problem, II // Acta Mathematica of the Academy of Sciences, Hungary. — 1964. — V. 15, N 3–4, P. 445–447.
4. Kostochka A. V. Color-Critical Graphs and Hypergraphs with Few Edges: A Survey // More Sets, Graphs and Numbers. Bolyai Society Mathematical Studies, eds. E. Györi, G. O. H. Katona, L. Lovász. — V. 15. — Springer, 2006. — P. 175–198.
5. Райгородский А. М., Шабанов Д. А. Задача Эрдеша–Хайнала о раскрасках гиперграфов, ее обобщения и смежные проблемы // УМН. — 2011. — Т. 66, вып. 5. — С. 109–182.
6. Erdős P., Lovász L. Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions // Infinite and Finite Sets, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, North Holland, Amsterdam. — 1973. — V. 10. — 609–627.
7. Beck J. On 3-chromatic hypergraphs // Discrete Mathematics. — 1978. — V. 24, N 2. — P. 127–137.
8. Lu L.. On a problem of Erdős and Lovász on coloring non-uniform hypergraphs. — www.math.sc.edu/~lu/papers/propertyB.pdf.

Поступила в редакцию 31.05.2011