УДК 514.174.5

Д. А. Белов, Н. А. Александров

Гимназия № 26 г. Набережные Челны

О разбиении плоских множеств на шесть частей малого диаметра

В настоящей работе мы улучшаем прежнюю верхнюю оценку для минимального диаметра каждой из шести частей некоторого разбиения произвольного множества диаметра 1 на плоскости.

Ключевые слова: проблема Борсука, диаметр, разбиение, универсальная покрывающая система.

1. Введение и формулировка результата

В 1933 году К. Борсук задал вопрос: верно ли, что любое множество диаметра 1 в $\mathbb{R}^d$ разбивается на $d+1$ часть меньшего диаметра (см. [1])? А в 1956 году Х. Ленц предложил следующий вариант вопроса Борсука (см. [2]): если $\Phi \subset \mathbb{R}^2$ и диаметр Φ равен единице, то, коль скоро

$$d(\Phi, k) = \inf\left\{x \in \mathbb{R}^+ : \Phi \subseteq \Phi_1 \cup \ldots \cup \Phi_k, \quad \forall\, i \quad \operatorname{diam} \Phi_i \leqslant x\right\}, \quad d(k) = \sup_{\Phi} d(\Phi, k),$$

как устроена последовательность чисел $d(k)$? Величины $d(k)$ в разное время оценивали сам Ленц (см. [2], [3]), Г. Хадвигер и Г. Дебруннер (см. [4]), М. Дембиньски и М. Лассак (см. [5]) и В.П. Филимонов (см. [6]). Сейчас известно, например, что

$$d(1) = d(2) = 1, \;\; d(3) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \;\; d(4) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \;\; 0.5877\ldots = \sin\frac{\pi}{5} \leqslant d(5) \leqslant 0.602\ldots,$$
$$0.5051\ldots = \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{22}} \leqslant d(6) \leqslant \sqrt{\frac{13}{3}}\left(2-\sqrt{3}\right) = 0.5577\ldots$$

Здесь последняя оценка принадлежит Филимонову, и именно ее мы улучшим в настоящей работе.

Теорема 1. *Выполнено неравенство*

$$d(6) \leqslant \frac{10-4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}-3} = 0.5426\ldots$$

Более подробную историю задачи можно найти в статье [6], а доказательство теоремы 1 мы приведем в следующем разделе.

2. Доказательство теоремы 1

Напомним, что любое множество диаметра 1 на плоскости покрывается правильным шестиугольником Ω с расстоянием 1 между параллельными сторонами (см. [7]). Нетрудно видеть, что тогда оно заведомо покрывается либо множеством Ω_1, либо множеством Ω_2 (рис. 1). На рисунке треугольники отсекаются прямыми, проходящими на расстояии $\frac{1}{2}$ от центров шестиугольников. Таким образом, для завершения доказательства теоремы

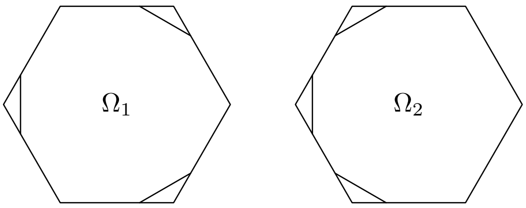

Рис. 1

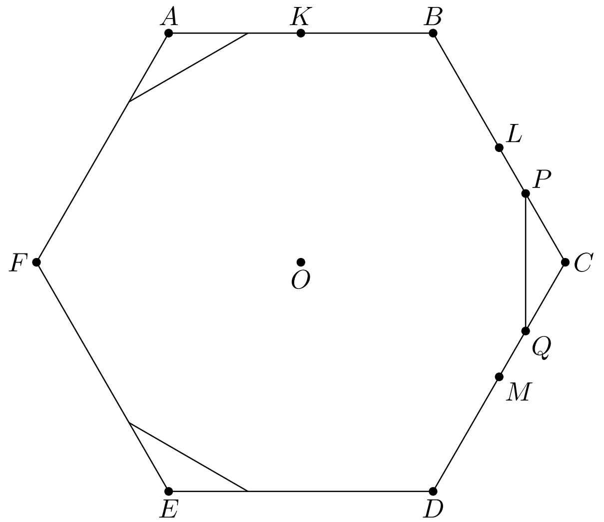

Рис. 2

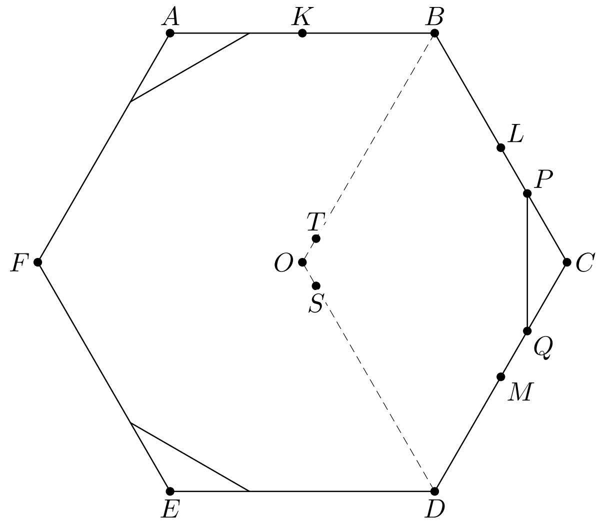

Рис. 3

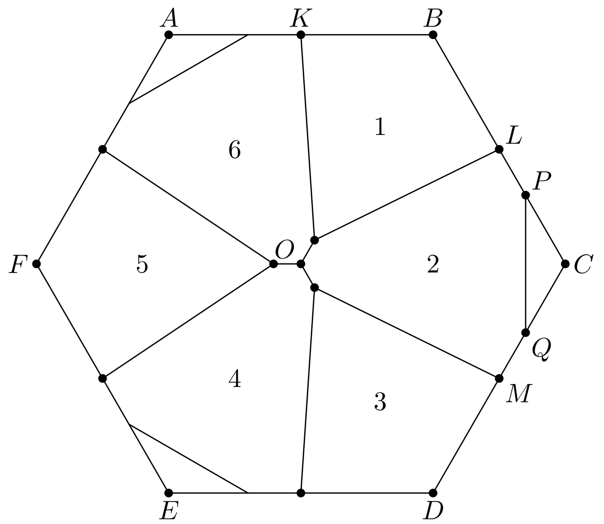

Рис. 4

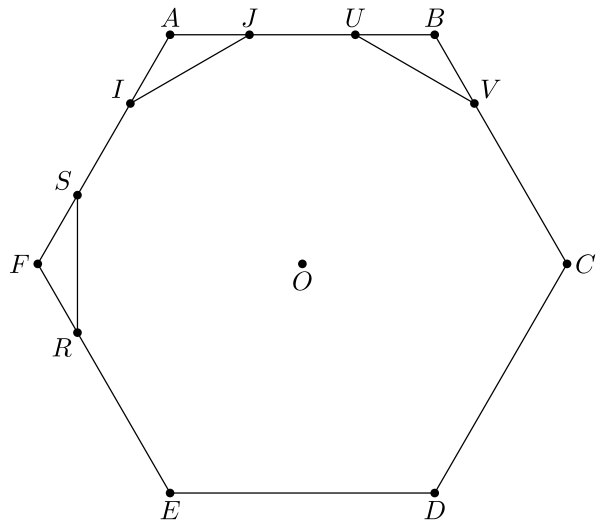

Рис. 5

1 достаточно убедиться в том, что оба множества Ω_1, Ω_2 допускают разбиения на шесть частей, диаметры которых не превосходят величины $\dfrac{10-4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}-3} = 0.5426\ldots$

Начнем с более симметричного множества Ω_1. Оно получено из шестиугольника $\Omega = ABCDEF$ отсечением треугольников с вершинами A, C, E. В последующем разбиении Ω_1 на шесть частей будут встречаться два типа фигур. Поэтому мы подробно опишем лишь часть разбиения. Пусть K, L, M — середины сторон AB, BC и CD шестиугольника. Пусть PCQ — отсеченный треугольник с вершиной C (рис. 2). Пусть O — центр Ω. Рассмотрим отрезки OB и OD. Возьмем на них такие точки T и S, что $|BT| = |DS| = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ (рис. 3). Первая часть разбиения — это $KBLT$, вторая — $OTLPQMS$. Остальные части получаем за счет симметрии (рис. 4). Нетрудно показать, что диаметр части $KBLT$ равен $|BT| = \sqrt{2-\sqrt{3}} = 0.517\ldots < 0.542$. Аналогично диаметр части $OTLPQMS$ достигается на OP и OQ, длины которых легко вычисляются и также равны $\sqrt{2-\sqrt{3}} = 0.517\ldots <$ < 0.542. Таким образом, в случае Ω_1 оценка получается даже лучше заявленной в теореме.

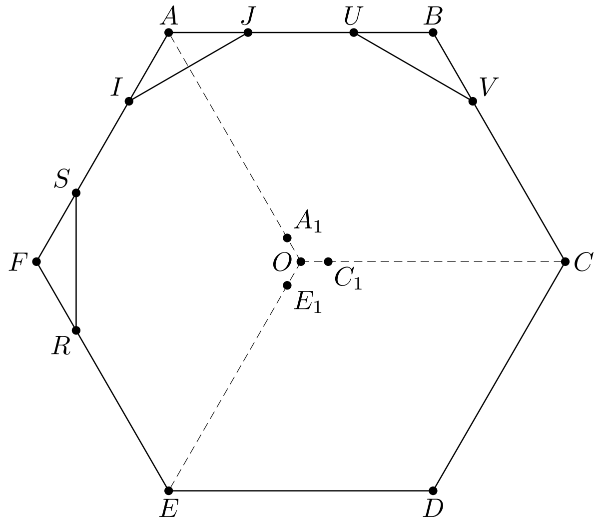

Рис. 6

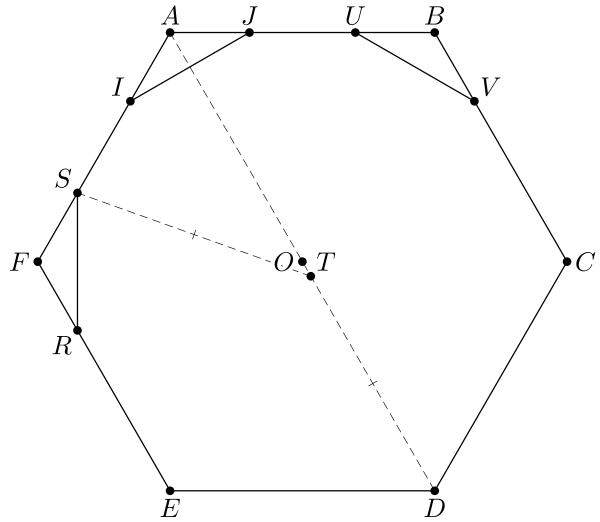

Рис. 7

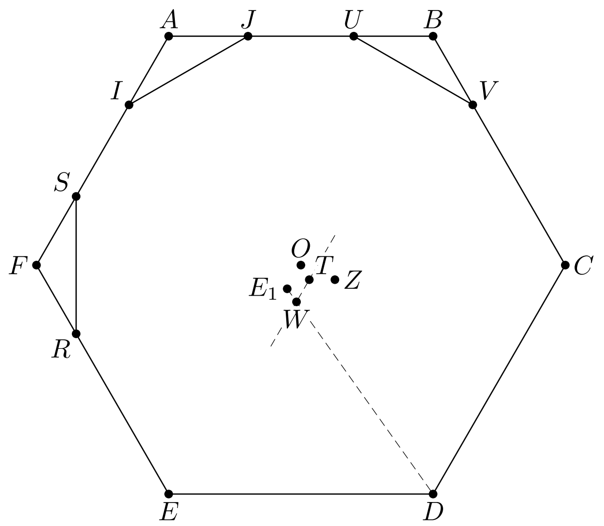

Рис. 8

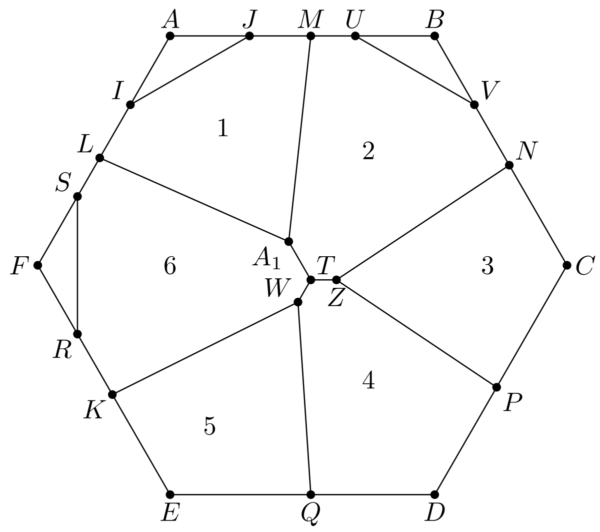

Рис. 9

Перейдем к множеству Ω_2. Теперь от шестиугольника $\Omega = ABCDEF$ отсечены треугольники BUV, AIJ и FSR (рис. 5). На отрезках AO, CO и EO выберем точки A_1, C_1, E_1, отстоящие от точек A, C, E на расстояние $\sqrt{2-\sqrt{3}}$, как показано на рис. 6. Также возьмем точку T, которая лежит на диагонали AD и равноудалена от S и D (рис. 7). Проведем прямую E_1D и прямую, которая проходит через T и параллельна CD. Точку пересечения этих прямых назовем W. Аналогично по C_1 определим точку Z (рис. 8). Наконец, опустим из T перпендикуляры на стороны шестиугольника. Возникнут точки K, L, M, N, P, Q, а с ними и разбиение множества Ω_2 на шесть частей (рис. 9).

Стандартными выкладками можно показать, что $|ST| = |TD| = \dfrac{10-4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}-3} = 0.5426\ldots$ и что бóльших расстояний ни в одной из частей разбиения нет. Теорема доказана.

Литература

1. *Borsuk K.* Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre // Fundamenta Math.— 1933.— V. 20.— P. 177—190.
2. *Lenz H.* Zerlegung ebener Bereiche in konvexe Zellen von moglichst kleineren Durchmesser // Jahresbericht d. DMV Bd. — 1956. — V. 58. — P. 87–97.
3. *Lenz H.* Uber die Bedeckung ebener Punktmegen durch solche kleineren Durchmessers // Arch. Math.— 1956.— V. VII. — P. 34—40.
4. *Хадвигер Г.*, *Дебруннер Г.* Комбинаторная геометрия плоскости.— М.: Наука, 1965.
5. *Dembiński M.*, *Lassak M.* Convering plane sets of three times less diameter // Demonstratio Math. — 1985. — V. XVIII. — P. 517—525.
6. *Филимонов В. П.* О покрытии плоских множеств // Матем. сборник. — 2010. — Т. 201, № 8. — С. 127–160.
7. *Болтянский В. Г.*, *Гохберг И. Ц.* Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. — М: Наука, 1965.

Поступила в редакцию 09.08.2011