

Предисловие редактора номера

А.М. Райгородский

Настоящий номер посвящен нескольким актуальным разделам дискретной математики. Разумеется, это лишь небольшая часть современного комбинаторного анализа. Номер состоит из четырех разделов, в каждом из которых мы публикуем статьи по определенной тематике. Так, первый раздел номера посвящен теории случайных графов и их приложениям; во втором разделе речь идет о классической проблеме Борсука в комбинаторной геометрии; в третьем разделе собраны статьи о проблемах, связанных с раскрасками метрических пространств и дистанционных графов; в четвертом разделе изучаются гиперграфы. Каждому разделу предпосылается краткий обзор, в котором отражена история, и нынешнее состояние проблематики этого раздела. Таким образом, мы не только рассчитываем собрать вместе небольшое количество работ сотрудников и аспирантов нашей кафедры - кафедры Дискретной математики ФИВТ, но еще и надеемся познакомить читателя с тем контекстом, в котором ведутся некоторые из наших исследований.

Раздел I

Случайные графы

УДК 519.175.4

А. Р. Ярмухаметов

Кафедра дискретной математики факультета инноваций и высоких технологий МФТИ;
Кафедра математической статистики механико-математического факультета
МГУ им. М. В. Ломоносова

О некоторых свойствах случайных дистанционных графов специального вида

В настоящей работе рассматриваются случайные подграфы полного дистанционного графа, у которого вершины — векторы $x \in \{0, 1\}^n$ с условием $\|x\| = \sqrt{n/2}$, а ребра — пары векторов, отстоящих друг от друга на расстояние $\sqrt{n/2}$. Ранее была известна пороговая вероятность для свойства связности таких случайных графов, а также пороговая вероятность для возникновения гигантской компоненты в них. Мы доказываем теперь, что, как и в классической модели Эрдеша—Реньи, фазовый переход от связности к ее отсутствию совпадает с переходом от связности к наличию изолированных вершин. Также мы формулируем результат о предельной вероятности связности в предположении, что вероятность ребра находится «внутри» фазового перехода.

Ключевые слова: случайный граф, связность, изолированная вершина, гигантская компонента, дистанционный граф, пороговая вероятность.

УДК 519.175.4 + 519.174.7

А. А. Кокоткин¹, А. М. Райгородский^{1,2,3}

¹Кафедра дискретной математики факультета инноваций и высоких технологий МФТИ;

²Кафедра математической статистики механико-математического факультета
МГУ им. М. В. Ломоносова;

³Отдел теоретических и прикладных исследований, ООО Яндекс.

О реализации случайных графов графами диаметров

Работа находится на стыке комбинаторной геометрии и теории случайных графов. Мы изучаем условия, при которых случайный граф в модели Эрдеша—Реньи содержит подграфы, изоморфные графам диаметров на плоскости с хроматическим числом 3. Для

соответствующей экстремальной характеристики случайного графа удастся получить точные по порядку оценки и даже асимптотики.

Ключевые слова: случайный граф, граф диаметров, хроматическое число.

УДК 519.175.4

Л. А.Остроумова

Кафедра дискретной математики факультета инноваций и высоких технологий МФТИ;
Отдел теоретических и прикладных исследований, ООО Яндекс.

Математические ожидания k -х входящих степеней вершин в случайных графах в модели Боллобаша—Риордана

Работа посвящена модели Боллобаша—Риордана случайного веб-графа. Эта модель адекватно описывает поведение реального веба. Рассмотрено математическое ожидание k -ой степени вершины в такой модели. Получены новые верхние и нижние оценки.

Ключевые слова: случайный граф, веб-граф, степень вершины.

УДК 519.175.4

Л. А.Остроумова

Кафедра дискретной математики факультета инноваций и высоких технологий МФТИ;
Отдел теоретических и прикладных исследований, ООО Яндекс.

Об g -диаметрах случайных графов в модели Боллобаша—Риордана

Работа посвящена модели Боллобаша—Риордана случайного веб-графа. Эта модель адекватно описывает поведение реального веба. Рассмотрено обобщение понятия диаметра графа - так называемый r -диаметр, который определяется как максимум по всем множествам вершин мощности r от минимума расстояний между парами вершин в данном множестве. Доказана теорема о том, что почти наверное веб-граф на n вершинах имеет g -диаметр, сколь угодно близкий к величине $\frac{\ln n - \ln r}{\ln \ln n}$.

Ключевые слова: случайный граф, веб-граф, диаметр.

УДК 519.175.4

Е.А. Гречников

Отдел теоретических и прикладных исследований, ООО Яндекс.

Арифметические свойства вторых степеней вершин случайного веб-графа в модели Боллобаша—Риордана

В настоящей работе изучается модель Боллобаша—Риордана случайного вебграфа. Рассматривается математическое ожидание числа вершин заданной второй степени в таком случайном графе, и доказывается, что одна из его главных составляющих является линейной комбинацией с рациональными коэффициентами от 1, $\ln 2$ и π .

Ключевые слова: случайный граф, веб-граф, степень вершины.

Раздел II Проблема Борсука

УДК 514.174.5

В. В.Буланкина

Кафедра дискретной математики факультета инноваций и высоких технологий МФТИ;
Кафедра математической статистики механико-математического факультета МГУ
им. М. В.Ломоносова

О разбиении плоских множеств на пять p частей без расстояния

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

В 1933 году К. Борсук предложил разбивать множества диаметра 1 на части меньшего диаметра, и сейчас эта задача Борсука – одна из самых популярных в комбинаторной геометрии. В 1956 году Х. Ленц уточнил задачу Борсука, поставив вопрос о минимальном диаметре части в разбиении множества на данное число частей. А в 2010 году В.П. Филимонов заменил вопрос о минимальном диаметре на вопрос о минимальном расстоянии, которого нет среди точек каждой из частей. Филимонов показал тогда же, что при разбиении на пять частей всегда можно избежать расстояния $\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577 \dots$. Нам удалось доказать, что то же самое верно для расстояния $\sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0.517 \dots$. При этом мы разработали новую технику для изучения бесконечных универсальных покрывающих систем, что интересно само по себе.

Ключевые слова: проблема Борсука, диаметр, запрещенное расстояние, разбиение, универсальная покрывающая система.

УДК 514.174.5

Е.Ю. Воронецкий
Школа № 42 г. Петрозаводск

О разбиении плоских множеств на четыре, пять и шесть частей без достаточно маленьких расстояний

В настоящей работе мы улучшаем прежнюю верхнюю оценку для минимального расстояния, которого нет между точками каждой из пяти частей некоторого разбиения произвольного множества диаметра 1 на плоскости.

Ключевые слова: проблема Борсука, диаметр, запрещенное расстояние, разбиение, универсальная покрывающая система.

УДК 514.174.5

Д. А. Белов, Н. А. Александров
Гимназия № 26 г. Набережные Челны

О разбиении плоских множеств на шесть частей малого диаметра

В настоящей работе мы улучшаем прежнюю верхнюю оценку для минимального диаметра каждой из шести частей некоторого разбиения произвольного множества диаметра 1 на плоскости.

Ключевые слова: проблема Борсука, диаметр, разбиение, универсальная покрывающая система.

УДК 519.174.7

А. Б.Купавский^{1,2,4}, Е.И.Пономаренко³, А.М. Райгородский^{1,3,4}

¹Кафедра дискретной математики факультета инноваций и высоких технологий МФТИ;

²Кафедра теории чисел механико-математического факультета
МГУ им. М. В.Ломоносова;

³Кафедра математической статистики механико-математического факультета
МГУ им. М. В.Ломоносова;

⁴Отдел теоретических и прикладных исследований, ООО Яндекс.

О некоторых аналогах проблемы Борсука в пространстве Q_n

В 1933 году К. Борсук высказал гипотезу о том, что всякое множество диаметра 1 в \mathbb{R}^n может быть разбито на $n+1$ часть меньшего диаметра. Эта гипотеза была опровергнута в 1993 году. Мы рассматриваем различные обобщения задачи Борсука на случай множеств, лежащих в пространстве \mathbb{Q}^n с евклидовой метрикой и более общей метрикой l_p .

Ключевые слова: проблема Борсука, раскраска и разбиение, граф диаметров.

УДК 519.174.7

В.Б. Гольдштейн

Кафедра анализа данных факультета инноваций и высоких технологий МФТИ;
ООО Яндекс.

О проблеме Борсука для $(0, 1)$ - и $(-1, 0, 1)$ -многогранников в пространствах малой размерности

Изучается классическая гипотеза Борсука о разбиении множеств на части меньшего диаметра. Гипотеза доказывается для $(0, 1)$ -векторов при $n \leq 9$ и для $(-1, 0, 1)$ -векторов при $n \leq 6$. Здесь n — это размерность.

Ключевые слова: проблема Борсука, диаметр, алгоритмы раскраски.

Раздел III

Хроматические числа пространств

УДК 519.174.7 + 519.154

А. Б.Купавский^{1,2,4}, А.М. Райгородский^{1,3,4}, М. В. Титова³

¹Кафедра дискретной математики факультета инноваций и высоких технологий МФТИ;

²Кафедра теории чисел механико-математического факультета
МГУ им. М. В. Ломоносова;

³Кафедра математической статистики механико-математического факультета
МГУ им. М. В. Ломоносова;

⁴Отдел теоретических и прикладных исследований, ООО Яндекс.

О плотнейших множествах без расстояния единица в пространствах малых размерностей

В данной работе мы исследуем значение максимальной верхней плотности подмножества \mathbb{R}^d , свободного от расстояния 1, при $d \leq 8$. Мы получаем новые нижние оценки указанной величины и применяем полученные результаты к решению одной задачи геометрической теории Рамсея.

Ключевые слова: верхняя плотность, множества без расстояния единица, хроматическое число пространства, числа Рамсея, дистанционные графы, решетки, упаковки.

УДК 519.174.7 + 519.154

А. Е. Звонарев², А.М. Райгородский^{1,3,4}

¹Кафедра дискретной математики факультета инноваций и высоких технологий МФТИ;

²Кафедра теории вероятностей механико-математического факультета
МГУ им. М. В. Ломоносова;

³Кафедра математической статистики механико-математического факультета
МГУ им. М. В. Ломоносова;

⁴Отдел теоретических и прикладных исследований, ООО Яндекс.

О дистанционных графах с большим хроматическим и малым

КЛИКОВЫМ ЧИСЛАМИ

Работа связана с изучением хроматического числа $\chi(\mathbb{R}^n)$ евклидова пространства, которое определяется как минимальное количество цветов, необходимых для такой покраски точек \mathbb{R}^n , что любые две точки, отстоящие друг от друга на расстояние 1, покрашены в разные цвета. Известно, что $\chi(\mathbb{R}^n) \geq (\zeta + o(1))^n$, где $\zeta = 1.239 \dots$. Это равносильно существованию n -мерного дистанционного графа (вершины - точки, ребра - отрезки длины 1) с хроматическим числом $(\zeta + o(1))^n$. Мы доказываем гораздо большее: существуют дистанционные графы с хроматическим числом $(\zeta + o(1))^n$ и без клик растущего размера.

Ключевые слова: хроматическое число пространства, дистанционный граф, граф без клик, теория Рамсея.

УДК 519.174.7

Е.И.Пономаренко², А.М. Райгородский^{1,2,3}

¹Кафедра дискретной математики факультета инноваций и высоких технологий МФТИ;

²Кафедра математической статистики механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова;

³Отдел теоретических и прикладных исследований, ООО Яндекс.

О хроматическом числе пространства \mathbb{Q}^n

Работа посвящена классической проблеме Нелсона–Хадвигера о хроматическом числе пространства. Мы рассматриваем обобщение проблемы на случай пространства \mathbb{Q}^n . Мы вводим новую величину $\chi_{\text{aff}}(\mathbb{Q}^n)$, равную максимальному значению хроматического числа дистанционного графа, вершины которого расположены в некотором аффинном подпространстве размерности n некоторого пространства \mathbb{Q}^m , а ребра порождены рациональным расстоянием. Доказаны новые оценки для этой величины.

Ключевые слова: хроматическое число пространства, рациональное пространство.

Раздел IV

Раскраски гиперграфов

УДК 519.112.7 + 519.174 + 519.179.1

Д.А. Шабанов

Кафедра дискретной математики факультета инноваций и высоких технологий МФТИ;

Кафедра теории вероятностей механико-математического факультета

МГУ им. М. В. Ломоносова;

Отдел теоретических и прикладных исследований, ООО Яндекс.

Об одном обобщении задачи Эрдеша–Ловаса

Исследуется обобщение классической задачи Эрдеша–Ловаса, связанное с раскрасками неоднородных гиперграфов. Пусть $H = (V, E)$ - произвольный гиперграф с минимальной мощностью ребра n и обхватом не меньше 4. В работе получено новое достаточное условие r -раскрашиваемости гиперграфа H в терминах ограничения на функцию $f_r(H) = \sum_{e \in E} r^{1-|e|}$

Ключевые слова: раскраски гиперграфов, задача Эрдеша–Ловаса, гиперграфы с большим обхватом.

УДК 519.179.1 + 519.174

С.М. Тепляков

Кафедра математической статистики механико-математического факультета

**Рекуррентные верхние оценки в задаче Эрдеша–Хайнала
о раскраске гиперграфа и в ее обобщениях**

В 1961 году П. Эрдеш и А. Хайнал поставили задачу об отыскании величины $m(n)$, равной наименьшему количеству ребер в n -однородном гиперграфе с хроматическим числом больше двух. Сейчас известны различные асимптотические оценки для $m(n)$. Однако точные значения найдены лишь при $n \leq 3$. При других малых n есть только рекуррентные оценки. Мы рассматриваем важное обобщение задачи, а именно, нас интересует величина $mk(n)$, равная минимальному числу ребер в n -однородном гиперграфе, не допускающем двухцветной раскраски множества своих вершин, при которой каждое ребро содержит не менее k вершин первого цвета и не менее k вершин второго цвета.

Нам удастся найти ряд рекуррентных оценок для $mk(n)$, которые при многих n и k значительно уточняют все ранее доказанные результаты.

Ключевые слова: гиперграф, хроматическое число.