УДК 519.179.1 + 519.174

*С. М. Тепляков*

Кафедра математической статистики механико-математического факультета
МГУ им. М. В. Ломоносова

# Рекуррентные верхние оценки в задаче Эрдеша–Хайнала о раскраске гиперграфа и в ее обобщениях

В 1961 году П. Эрдеш и А. Хайнал поставили задачу об отыскании величины $m(n)$, равной наименьшему количеству ребер в $n$-однородном гиперграфе с хроматическим числом больше двух. Сейчас известны различные асимптотические оценки для $m(n)$. Однако точные значения найдены лишь при $n \leqslant 3$. При других малых $n$ есть только рекуррентные оценки. Мы рассматриваем важное обобщение задачи, а именно, нас интересует величина $m_k(n)$, равная минимальному числу ребер в $n$-однородном гиперграфе, не допускающем двухцветной раскраски множества своих вершин, при которой каждое ребро содержит не менее $k$ вершин первого цвета и не менее $k$ вершин второго цвета. Нам удается найти ряд рекуррентных оценок для $m_k(n)$, которые при многих $n$ и $k$ значительно уточняют все ранее доказанные результаты.

**Ключевые слова:** гиперграф, хроматическое число.

## 1. Введение

Настоящая работа посвящена известной проблеме экстремальной теории гиперграфов, которая восходит к П. Эрдешу и А. Хайналу.

Прежде всего напомним, что *гиперграф* — это пара $H = (V, E)$, где $V$ — конечное множество, называемое *множеством вершин* гиперграфа, а $E$ — произвольная совокупность различных подмножеств множества $V$, называемых *ребрами* гиперграфа. Если все ребра имеют одинаковую мощность $n$, то гиперграф называется *$n$-однородным.*

В 1961 году Эрдеш и Хайнал заметили (см. [1]), что если у $n$-однородного гиперграфа не слишком много ребер (например, не больше, чем $2^{n-1}$), то вершины этого гиперграфа допускают раскраску в два цвета, при которой все ребра гиперграфа неодноцветны (содержат вершины обоих цветов). Это мотивировало их к рассмотрению величины $m(n)$, равной наименьшему $m \in \mathbb{N}$, такому, что *существует* $n$-однородный гиперграф с $m$ ребрами, вершины которого *нельзя* раскрасить в два цвета с соблюдением условия неодноцветности всех ребер.

Следуя, опять же, Эрдешу и Хайналу, можно сказать еще и так: *гиперграф обладает свойством $B$, если найдется раскраска множества его вершин в два цвета, при которой все его ребра неодноцветны; тогда*

$$m(n) = \min\{|E| : \ H = (V, E) - n\text{-однородный гиперграф}, \ \ H \text{ не обладает свойством } B\}.$$

Сейчас известно, что

$$0.1 \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/2} 2^n \leqslant m(n) \leqslant e(\ln 2) n^2 2^{n-2}(1 + o(1)). \tag{1}$$

Нижняя оценка принадлежит Дж. Радхакришнану и А. Сринивасану (см. [2]), а верхняя — Эрдешу (см. [3]).

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 12-01-00683.

Одно из наиболее естественных обобщений величины $m(n)$ было предложено А. М. Райгородским и Д. А. Шабановым в 2003 году (см. [4]). А именно, скажем, что гиперграф обладает свойством $B_k$, если его вершины можно так покрасить в два цвета, чтобы каждое его ребро содержало не меньше $k$ вершин первого цвета и не меньше $k$ вершин второго цвета. Разумеется, если гиперграф $n$-однороден, то $k \leqslant \frac{n}{2}$. Соответственно

$$m_k(n) = \min\{|E|\colon H = (V, E) - n\text{-однородный гиперграф},\ \ H \text{ не обладает свойством } B_k\}.$$

Понятно, что $m_1(n) = m(n)$.

Поскольку величина $m_k(n)$ зависит от двух параметров, устроена она сложнее, нежели ее классическая предшественница. К настоящему времени известно довольно много разных оценок для $m_k(n)$, и их подробный обзор можно найти в статье [5] (см. также [6]). В данной работе нас будут интересовать верхние оценки, их мы здесь и приведем.

В сущности, есть всего два результата, и оба они были получены Шабановым (см. [4, 7]):

$$m_k(n) \leqslant m_{k-1}(n-1) \leqslant \ldots \leqslant m(n-k+1) \leqslant \frac{e\ln 2}{4}(n-k+1)^2 2^{n-k+1}(1+o(1)),$$

$$m_k(n) \leqslant \frac{e\ln 2}{4}\, n^2 \frac{2^n}{\sum\limits_{i=0}^{k-1} C_n^i}(1+o(1)), \quad k = o\left(\frac{n}{\ln n}\right). \tag{2}$$

Конечно, первый результат с ростом $n$ гораздо слабее второго. Более того, при конкретных («малых») значениях величин $k$ и $n$ оба результата совсем не применимы, ведь в них никак не конкретизируется вид функции $o(1)$.

В принципе аналогичная проблема возникает и в связи с верхней оценкой из соотношения (1). Этой проблеме был посвящен ряд работ, в которых были получены явные рекуррентные оценки для величины $m(n)$.

Во-первых, Х. Аббот и Л. Мозер показали (см. [8]), что

$$m(ab) \leqslant m(a)(m(b))^a. \tag{3}$$

Поскольку равенства $m(2) = 3$, $m(3) = 7$ очень просты, утверждение Аббота–Мозера позволяет делать явные оценки и для других значений параметров. При этом асимптотически оно гораздо слабее (1).

Во-вторых, Аббот и Д. Хансен установили (см. [9]) неравенства

$$m(n) \leqslant m(n-2)n + 2^{n-1}, \quad n = 2k+1,$$
$$m(n) \leqslant m(n-2)n + 2^{n-1} + 2^{n-2}, \quad n = 2k,$$
$$m(n) \leqslant (2n-1)(m(n-2)+1).$$

Наконец, Б. Тофт доказал (см. [10]) оценку для четных $n$:

$$m(n) \leqslant m(n-2)n + 2^{n-1} + \frac{1}{2}C_n^{n/2}. \tag{4}$$

Все перечисленные оценки по-своему важны. Например, из результатов Аббота–Мозера вытекает неравенство $m(4) \leqslant 27$, которое Аббот–Хансен улучшают до $m(4) \leqslant 24$, а Тофт — до $m(4) \leqslant 23$; последний факт есть текущий рекорд, который, по-видимому, усилить нельзя (хотя известно лишь, что $m(4) \geqslant 17$). В то же время Аббот–Мозер показывают, что $m(6) \leqslant 147$, тогда как, по Абботу–Хансену,

$$m(6) \leqslant 6m(4) + 32 + 16 \leqslant 186, \quad m(6) \leqslant 11(m(4)+1) \leqslant 264,$$

а по Тофту, $m(6) \leqslant 180$.

В случае свойства $B_k$ подобный результат — это приведенный выше результат Шабанова $m_k(n) \leqslant m_{k-1}(n-1) \leqslant \ldots \leqslant m(n-k+1)$, поскольку теперь мы можем применять к нему рекурсии Аббота–Мозера, Аббота–Хансена или Тофта. Других результатов такого типа не было. Известно лишь, что конкретно $m_2(4) = 4$, $m_2(5) = 7$, $m_3(7) \leqslant 8$ и $m_4(9) \leqslant 8$ (см. [11]).

Нам удалось получить рекуррентные соотношения непосредственно для величин $m_k(n)$. Идеологически наши результаты близки к результатам Аббота–Мозера и Тофта. Соответственно в разделе 2 мы приведем оценки, которые служат в некотором смысле обобщениями неравенства (3); в разделе 3 мы сформулируем результаты типа (4). В разделе 4 мы обсудим оценку (2) и поймем, что она тоже может быть сделана явной (т.е. устраним функцию $o(1)$ из нее). В разделе 5 мы проведем детальный анализ соотношений между оценками из разделов 2–4 и выпишем в итоге наилучшие из полученных нами неравенств для $m_k(n)$ при некоторых малых $n$ и $k$. Наконец, в разделе 6 мы докажем все новые теоремы.

В заключение отметим, что проблематика, возникшая за полвека с момента постановки Эрдешем и Хайналом задачи про $m(n)$, крайне обширна и разнообразна. Обзор многочисленных результатов в этой области может быть найден в статьях [6] и [12].

## 2. Обобщение идеи Аббота–Мозера

В своей работе [8] Аббот и Мозер применили принцип, основанный на копировании одного гиперграфа, не обладающего свойством $B$, и своего рода объединении всех копий, в результате которого получаются ребра большей длины. Для объединения использовался второй гиперграф, также не обладающий свойством $B$. Мы действуем похожим методом, объединяя одинаковые гиперграфы, не обладающие свойством $B_k$, при помощи гиперграфа, не обладающего свойством $B_l$. В итоге возникает

**Теорема 1.** *Для любых натуральных $k$, $l$ и $a \geqslant 2k$, $b \geqslant 2l$ выполнено:*

$$m_{al+bk-kl+k+l-a-b}(ab) \leqslant m_k(a)(m_l(b))^a. \tag{5}$$

В частности, при $l = k = 1$ мы возвращаемся к неравенству (3) Аббота–Мозера. В параграфе 6.1 мы докажем теорему 1.

## 3. Обобщение идеи Тофта

В работе [10] Тофта используется идея «склейки» так называемых критических гиперграфов. Желая обобщить эту идею, введем понятие *$B_k$-критического* гиперграфа, то есть такого гиперграфа $H = (V, E)$, что он связен и не обладает свойством $B_k$, но любой гиперграф, получающийся из него выбрасыванием ребра, обладает этим свойством. В нижеследующем утверждении 1 мы приведем пример гиперграфа, не обладающего свойством $B_k$. А в утверждении 2 мы предъявим $B_k$-критический гиперграф.

**Утверждение 1.** *Пусть $n, l$ — натуральные числа, причем $n \geqslant 2$, а $l \leqslant \frac{n}{2}$. Рассмотрим множество вершин $V_l = \{x_1, \ldots, x_{2l-1}, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n\}$ и множество ребер $E_l$, состоящее из таких ребер $A$, что $A = \{x_1, \ldots, x_{2l-1}, a_i, b_i\}$, $i \in \{1, \ldots, n-l+1\}$, или $A = \{c_1, \ldots, c_{n-l+1}, a_{n-l+2}, \ldots, a_n\}$, где $c_i = a_i$ или $c_i = b_i$. Подчеркнем, что гиперграф $H_l = (V_l, E_l)$ имеет $2n+2l-1$ вершин, $n-l+1$ ребер размера $2l+1$ и $2^{n-l+1}$ ребер размера $n$. Тогда гиперграф $H_l = (V_l, E_l)$ не обладает свойством $B_l$.*

Утверждение 1 — аналог утверждения, сформулированного Тофтом в [10], и в нем построен гиперграф, не обладающий свойством $B_l$ с некоторым $l$ ($l \leqslant \frac{n}{2}$).

**Утверждение 2.** *Пусть $n, l$ — натуральные числа, причем $l \leqslant \frac{n}{2}$. Рассмотрим гиперграф $H_l = (V_l, E_l)$, у которого $V_l = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_{2l-1}\}$ и $A \in E_l$, если и только если $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_{2l-1}, y_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n-l+1$, или $A = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Этот гиперграф является $B_l$-критическим.*

Утверждения мы докажем в параграфах 6.3 и 6.4, а пока сформулируем с их помощью теорему, которая позволит нам получить оценки для величины $m_k(n)$. Справедлива

**Теорема 2.** *Зафиксируем натуральные числа $n, k, l$ с условиями $n \geqslant 2$, $k \geqslant l$ и $l \leqslant \frac{n}{2}$. Пусть $H_1$ и $H_2$ — два непересекающихся гиперграфа, причем $H_1$ — произвольный гиперграф, не обладающий свойством $B_k$, а $H_2$ — произвольный гиперграф, не обладающий свойством $B_l$, из утверждения 1 (утверждения 2) с соответствующими параметрами $n, l$. Рассмотрим гиперграф $H$, полученный следующим образом:*

$$V(H) = V(H_1) \cup (V(H_2) \setminus \{x_1, \ldots, x_{2l-1}\}),$$
$$E(H) = (E(H_2 \setminus \{x_1, \ldots, x_{2l-1}\})) \cup$$
$$\cup \{A \mid A = A_i \cup B_j, A_i \in E(H_1), B_j \cup \{x_1, \ldots, x_{2l-1}\} \in E(H_2)\}.$$

*Тогда гиперграф $H$ не обладает свойством $B_k$.*

Из формулировки теоремы видно, что из нее можно извлекать оценки для величины $m_k(n)$. Однако для получения таких оценок нужно подсчитать общее число ребер итогового гиперграфа. Ниже мы получим следствия, в которых будут указаны явные рекуррентные формулы.

**Следствие 1.** *Имеет место оценка:*

$$m_k(n) \leqslant m_k(n-2) \cdot (n-k+1) + 2^{n-k+1}. \tag{6}$$

**Доказательство следствия 1.** Воспользуемся теоремой 2. В качестве гиперграфа $H_1$ возьмем любой $(n-2)$-однородный гиперграф с $m_k(n-2)$ ребрами, не обладающий свойством $B_k$. Тогда $H_1$, очевидно, $B_k$-критический. В качестве гиперграфа $H_2$ возьмем гиперграф из утверждения 1.

Заметим, что гиперграф $H$, получаемый с помощью конструкции из теоремы 2, $n$-однороден. Ввиду теоремы 2 он не обладает свойством $B_k$. В то же время $|E(H)| = |E(H_1)| \cdot (n-l+1) + 2^{n-l+1}$. Значит, $m_k(n) \leqslant m_k(n-2) \cdot (n-l+1) + 2^{n-l+1}$. Замечая, что по условию теоремы 2 выполнено неравенство $l \leqslant k$, и подставляя $l = k$, получаем искомую оценку. Следствие доказано. $\triangleright$

**Следствие 2.** *Имеет место оценка*

$$m_k(n) \leqslant m_k(n-1) \cdot (n-k+1) + 1. \tag{7}$$

**Доказательство следствия 2.** Воспользуемся теоремой 2. В качестве гиперграфа $H_1$ возьмем любой $(n-1)$-однородный гиперграф с $m_k(n-1)$ ребрами, не обладающий свойством $B_k$. Тогда $H_1$, очевидно, $B_k$-критический. В качестве гиперграфа $H_2$ возьмем гиперграф из утверждения 2.

Заметим, что гиперграф $H$, получаемый с помощью конструкции из теоремы 2, $n$-однороден. Ввиду теоремы 2 он не обладает свойством $B_k$. В то же время $|E(H)| = |E(H_1)| \cdot (n-l+1) + 1$. Значит, $m_k(n) \leqslant m_k(n-1) \cdot (n-l+1) + 1$. Подставляя $l = k$, получаем искомое неравенство. Следствие доказано. $\triangleright$

Теорему 2 мы докажем в параграфе 6.2. Заметим, что можно придумать массу других подобных утверждений. Однако нам не удалось найти такого утверждения, из которого следовала бы оценка лучше нашей.

## 4. Оценки с помощью систем общих представителей

Оценка (2) была получена с помощью так называемых систем общих представителей (с.о.п.). Напомним основные определения. Пусть $\Re_n = \{1, \ldots, n\}$ — множество, состоящее из $n$ элементов. Пусть, далее, $\mathscr{M} = \{M_1, \ldots, M_s\}$ — совокупность любых подмножеств $\Re_n$. Положим $k = \min\limits_{i=1,\ldots,s} |M_i|$. Рассмотрим произвольное множество $S \subseteq \Re_n$, обладающее тем свойством, что $S \cap M_j \neq \varnothing$ для каждого $j \in \{1, \ldots, s\}$. Такое множество $S$ называется *системой общих представителей (с.о.п.)* для совокупности $\mathscr{M}$. Положим

$$\zeta(n, s, k) = \max_{\mathscr{M}} \min\{|S| : S \text{ является с.о.п. для } \mathscr{M}\}.$$

В данных обозначениях сформулируем теорему, которая и позволит нам получать верхние оцеки для $m_k(n)$.

**Теорема 3.** *Пусть $v \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ с условиями $n < \frac{v}{2}$, $k \leqslant \frac{n}{2}$. Тогда при*

$$a = C_v^n\ ,\ b = \min_x \sum_{j=0}^{k-1} \left(C_x^{n-j} \cdot C_{v-x}^{j} + C_x^{j} \cdot C_{v-x}^{n-j}\right)\ ,\ c = 2^v$$

*имеем*

$$m_k(n) \leqslant \min_v \zeta(a, c, b).$$

Доказательство этой теоремы приведено в статье [7] Д.А. Шабанова и не будет приводиться здесь. Неравенство (2) получается из теоремы 3 и следующего утверждения, в котором дается явная оценка величины $\zeta(n, s, k)$.

**Теорема 4.** *Для любых $n, s, k$ имеет место неравенство*

$$\zeta(n, s, k) \leqslant \max\left\{\frac{n}{k}, \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n}\right\} + \frac{n}{k} + 1.$$

Доказательство теоремы 4 приведено в книге [13] А.М. Райгородского и в данной статье не приводится. Оценка из теоремы 4 при конкретных (малых) значениях параметров $n, s, k$ допускает небольшое уточнение. Опишем алгоритм построения системы общих представителей, дающий и саму оценку, и ее уточнение.

Зафиксируем совокупность $\mathscr{M} = \{M_1, \ldots, M_s\}$. Возьмем такой элемент $\nu_1 \in \Re_n$, что количество множеств из $\mathscr{M}$, которые его содержат, максимально. Это будет первый элемент с.о.п. Нетрудно видеть, что он служит представителем для не менее $\left\lceil \frac{sk}{n} \right\rceil$ множеств из $\mathscr{M}$. Значит, непредставленными остались $s_1 \leqslant s - \left\lceil \frac{sk}{n} \right\rceil$ множеств, причем все они находятся в $\Re_n \setminus \{\nu_1\} = \Re_{n-1}$. Продолжая процедуру, берем элемент $\nu_2 \in \Re_{n-1}$, который принадлежит не менее $\left\lceil \frac{s_1 k}{n-1} \right\rceil$ множествам $\mathscr{M}$. И так далее, покуда не исчерпаем всю совокупность $\mathscr{M}$.

В дальнейшем, строя наилучшим образом оценки для $m_k(n)$ с помощью систем общих представителей, мы перебираем все возможные значения величины $v$ из теоремы 3, для каждого из таких значений берем параметры $a, b, c$ и оцениваем $\zeta(a, c, b)$ с помощью описанного «жадного» алгоритма. Эти расчеты осуществляются на компьютере.

## 5. Сопоставление результатов

В нашей работе мы получили рекуррентные соотношения (5), (6), (7). Кроме того, мы знаем оценку Шабанова

$$m_k(n) \leqslant m_{k-1}(n-1) \leqslant \ldots \leqslant m(n-k+1) \tag{8}$$

и метод получения оценок с помощью с.о.п. Попытаемся сравнить все эти результаты между собой. Рассмотрим $k = 2, 3$ и $n \leqslant 10$.

Напомним, что $m(2) = 3$, $m(3) = 7$, $m(4) \leqslant 23$, $m(6) \leqslant 147$ (см. введение). Заметим, что, исходя из неравенств, выписанных во введении, $m(5) \leqslant 51$, $m(7) \leqslant 421$, $m(8) \leqslant 1339$, $m(9) \leqslant 2401$, $m(10) \leqslant 7803$. Также из введения мы знаем, что в работе [11] получены соотношения $m_2(4) = 4$, $m_2(5) = 7$, $m_3(7) \leqslant 8$, $m_4(9) \leqslant 8$. Наконец, равенство $m_3(6) = 3$ очевидно.

Посмотрим на неравенство (5). В нем есть параметры $k, l \in \mathbb{N}$. Первый из них может путаться с индексом величины $m_k(n)$. Поэтому переобозначим его через $\kappa$. Ясно, что величины $\kappa, l$ не равны одновременно единице, т.к. в этом случае мы возвращаемся к величине $m(n)$. Пусть сперва $\kappa = 1$, $l = 2$. Мы знаем, что $a \geqslant 2\kappa$, $b \geqslant 2l$, т.е. $a \geqslant 2$, $b \geqslant 4$. Сама оценка имеет вид $m_{a+1}(ab) \leqslant m(a)(m_2(b))^a$. Нас интересуют только числа $k = 2, 3$ и $n = ab \leqslant 10$, поэтому либо $a = 2$, $b = 4$, либо $a = 2$, $b = 5$, и видно, что при $k = 2$ оценка не работает. Если теперь $\kappa = 2$, $l = 1$, то опять $k \geqslant 3$ и в нужных нам ситуациях либо $a = 4$, $b = 2$, либо $a = 5$, $b = 2$. В итоге получаем $m_3(8) \leqslant 48$ и $m_3(10) \leqslant 147$.

Пусть теперь $k = 2$. Случаи $n \leqslant 5$, как мы помним, изучены ранее. Пусть, стало быть, $n \geqslant 6$. Неравенство (5) не применимо, а неравенства (6), (7), (8) и метод с.о.п. работают. Их и сравним. Имеем

$$\begin{gathered} m_2(6) \leqslant m_2(4) \cdot 5 + 2^5 = 52 \quad \text{(неравенство (6))}, \\ m_2(6) \leqslant m_2(5) \cdot 5 + 1 = 36 \quad \text{(неравенство (7))}, \\ m_2(6) \leqslant m(5) \leqslant 51 \quad \text{(неравенство (8))}, \\ m_2(6) \leqslant 66 \quad \text{(метод с.о.п.)}. \end{gathered}$$

Видим, что в данном случае оценка (7) сильнее всех.

Теперь подсчитаем $m_2(7)$ по тем же формулам:

$$\begin{gathered} m_2(7) \leqslant m_2(5) \cdot 6 + 2^6 = 106 \quad \text{(неравенство (6))}, \\ m_2(7) \leqslant m_2(6) \cdot 6 + 1 \leqslant 217 \quad \text{(неравенство (7))}, \\ m_2(7) \leqslant m(6) \leqslant 147 \quad \text{(неравенство (8))}, \\ m_2(7) \leqslant 182 \quad \text{(метод с.о.п.)}. \end{gathered}$$

Здесь сильнее всех оценка (6).

Аналогично действуем для $n = 8, 9, 10$:

$$\begin{gathered} m_2(8) \leqslant m_2(6) \cdot 7 + 2^7 \leqslant 380 \quad \text{(неравенство (6))}, \\ m_2(8) \leqslant m_2(7) \cdot 7 + 1 \leqslant 743 \quad \text{(неравенство (7))}, \\ m_2(8) \leqslant m(7) \leqslant 421 \quad \text{(неравенство (8))}, \\ m_2(8) \leqslant 468 \quad \text{(метод с.о.п.)}, \\ m_2(9) \leqslant m_2(7) \cdot 8 + 2^8 \leqslant 1104 \quad \text{(неравенство (6))}, \\ m_2(9) \leqslant m_2(8) \cdot 8 + 1 \leqslant 3041 \quad \text{(неравенство (7))}, \\ m_2(9) \leqslant m(8) \leqslant 1339 \quad \text{(неравенство (8))}, \end{gathered}$$

$$m_2(9) \leqslant 1146 \quad \text{(метод с.о.п.)},$$
$$m_2(10) \leqslant m_2(8) \cdot 9 + 2^9 \leqslant 3932 \quad \text{(неравенство (6))},$$
$$m_2(10) \leqslant m_2(9) \cdot 9 + 1 \leqslant 9937 \quad \text{(неравенство (7))},$$
$$m_2(10) \leqslant m(9) \leqslant 2401 \quad \text{(неравенство (8))},$$
$$m_2(10) \leqslant 2720 \quad \text{(метод с.о.п.)}.$$

Видим, что все неравенства, кроме (с.о.п.), в тех или иных ситуациях оказываются наилучшими: для $n = 6$ — неравенство (7), для $n = 7, 8, 9$ — неравенство (6), для $n = 10$ — неравенство (8).

Обратимся к случаю $k = 3$. Здесь нужно смотреть на $n \geqslant 7$, причем при $n = 7$ неравенство (6) не применимо:

$$m_3(7) \leqslant 8 \quad \text{(работа [11])},$$
$$m_3(7) \leqslant m_3(6) \cdot 5 + 1 = 16 \quad \text{(неравенство (7))},$$
$$m_3(7) \leqslant m(5) \leqslant 51 \quad \text{(неравенство (8))},$$
$$m_3(7) \leqslant 26 \quad \text{(метод с.о.п.)},$$
$$m_3(8) \leqslant 48 \quad \text{(неравенство (5))},$$
$$m_3(8) \leqslant m_3(6) \cdot 6 + 2^6 \leqslant 82 \quad \text{(неравенство (6))},$$
$$m_3(8) \leqslant m_3(7) \cdot 6 + 1 \leqslant 49 \quad \text{(неравенство (7))},$$
$$m_3(8) \leqslant m(6) \leqslant 147 \quad \text{(неравенство (8))},$$
$$m_3(8) \leqslant 63 \quad \text{(метод с.о.п.)},$$
$$m_3(9) \leqslant m_3(7) \cdot 7 + 2^7 \leqslant 184 \quad \text{(неравенство (6))},$$
$$m_3(9) \leqslant m_3(8) \cdot 7 + 1 \leqslant 337 \quad \text{(неравенство (7))},$$
$$m_3(9) \leqslant m(7) \leqslant 421 \quad \text{(неравенство (8))},$$
$$m_3(9) \leqslant 150 \quad \text{(метод с.о.п.)},$$
$$m_3(10) \leqslant 147 \quad \text{(неравенство (5))},$$
$$m_3(10) \leqslant m_3(8) \cdot 8 + 2^8 \leqslant 640 \quad \text{(неравенство (6))},$$
$$m_3(10) \leqslant m_3(9) \cdot 8 + 1 \leqslant 1201 \quad \text{(неравенство (7))},$$
$$m_3(10) \leqslant m(8) \leqslant 1339 \quad \text{(неравенство (8))},$$
$$m_3(10) \leqslant 343 \quad \text{(метод с.о.п.)}.$$

При $n = 7$ известный ранее результат улучшить не удалось, при $n = 8, 10$ и даже при $n = 9$ лучшим является неравенство (5), ведь $m_3(9) \leqslant m_3(10) \leqslant 147$.

В заключение приведем таблицу, содержащую наилучшие оценки для величин $m_k(n)$ при малых $k, n$.

| $k/n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 7 | 23 | 51 | 147 |
| 2 | — | — | 4, [10] | 7, [10] | 36, (7) |
| 3 | — | — | — | — | 3 |
| $k/n$ | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| 1 | 421 | 1339 | 2401 | 7803 | |
| 2 | 106, (6) | 380, (6) | 1104, (6) | 2401, (8) | |
| 3 | 8, [10] | 48, (5) | 147, (5) | 147, (5) | |

Хорошо видно, что все подходы важны. Кажется, что маловато оценок, где (7) сильнее всех, и вовсе нет оценок с превосходством (с.о.п.). В первом случае можно заметить, что, например, $m_2(8)$ хоть и оценивается лучше всего за счет (6), но в этой оценке участвует величина $m_2(6)$, оценка которой, в свою очередь, уже опирается на (7): мы ведь указываем лишь последнюю рекурсию, а не всю предысторию. Что же касается с.о.п., то ясно, что при больших по сравнению с $k$ величинах $n$ они все равно рано или поздно возобладают. А при других соотношениях между $k$ и $n$ «выстрелить» может любое неравенство.

## 6. Доказательства

### 6.1. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 основывается на принципе склейки нескольких гиперграфов одинаковой структуры для получения более «крупного» (с точки зрения длины ребра) гиперграфа, обладающего нужными нам свойствами.

Возьмем $a$-однородный гиперграф $H = (V, E)$, который имеет $m_k(a)$ ребер и не обладает свойством $B_k$. Без ограничения общности будем считать, что $V = \{1, 2, \ldots, v\}$. Пусть $H_1 = (V_1, E_1)$ — $b$-однородный гиперграф с $m_l(b)$ ребрами, который не обладает свойством $B_l$. Рассмотрим $H_t = (V_t, E_t)$, $t = 2, \ldots, v$, — непересекающиеся по вершинам копии гиперграфа $H_1$. Построим $ab$-однородный гиперграф $\tilde{H} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ следующим образом. Положим $\tilde{V} = \bigcup_{i=1}^{v} V_i$. Пусть $h \in E$ — некоторое ребро гиперграфа $H$, $h = \{s_1, \ldots, s_a\}$. Тогда рассмотрим совокупность $\tilde{E}_h = \{f_1 \cup \ldots \cup f_a : f_i \in E_{s_i}, i = 1, \ldots, a\}$ всевозможных объединений ребер гиперграфов $H_{s_1}, \ldots, H_{s_a}$, взятых по одному из каждого гиперграфа. Получается $(m_l(b))^a$ подмножеств множества $V$, каждое из которых имеет мощность $ab$. Наконец, положим $\tilde{E} = \bigcup_{h \in E} \tilde{E}_h$. Из построения следует, что $\tilde{H} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ — $ab$-однородный гиперграф, у которого $m_k(a)(m_l(b))^a$ ребер. Проверим, что он не обладает свойством $B_{al+bk-kl+k+l-a-b}$.

Пусть $\rho$ — произвольная раскраска множества $\tilde{V}$ в 2 цвета. Тогда $\rho$ задает двухцветные раскраски на всех множествах $V_i$, $i = 1, \ldots, v$. В силу того, что все $H_i$ не обладают свойством $B_l$, в каждом из гиперграфов найдется ребро, содержащее менее $l$ вершин одного цвета. Такое ребро мы обозначим $e_i$ (если таких ребер несколько, то возьмем любое из них). Рассмотрим следующую раскраску множества $V$ вершин гиперграфа $H$: вершине $i \in V = \{1, \ldots, v\}$ сопоставляем цвет, который «доминирует» в ребре $e_i$ (т.е. тот цвет, в который окрашены более чем $b-l$ вершин). Получается некоторая раскраска $\tilde{\rho}$ множества $V$ в два цвета. В силу того, что $H$ не обладает свойством $B_k$, найдется ребро $h_0$, которое в раскраске $\tilde{\rho}$ имеет по крайней мере $a-k+1$ вершин одного цвета (скажем, «красного»). Из построения множества $\tilde{E}_{h_0}$ следует, что $\tilde{e} = \bigcup_{i \in h_0} e_i \in \tilde{E}_{h_0}$. Как мы знаем, среди ребер $e_i$, входящих в состав ребра $\tilde{e}$, есть не менее $a - k + 1$ ребер, в каждом из которых не менее $b - l + 1$ вершин красного цвета. Таким образом, мы нашли ребро гиперграфа $\tilde{H}$, имеющее по крайней мере $(a - k + 1)(b - l + 1)$ вершин одного цвета. Следовательно, наш $ab$-однородный гиперграф уж точно не обладает свойством $B_{al+bk-kl+k+l-a-b}$.

### 6.2. Доказательство теоремы 2

Зафиксируем гиперграф $H_1$, не обладающий свойством $B_k$, и гиперграф $H_2$, не обладающий свойством $B_l$, из утверждения 1 или 2. Отметим, что доказательства в случаях, когда $H_2$ из утверждения 1 и когда $H_2$ из утверждения 2, совпадают. Ниже мы приведем общее рассуждение, верное в случае обоих утверждений.

Предположим, вопреки утверждению теоремы, что гиперграф $H$, построенный в нем, обладает свойством $B_k$. Рассмотрим произвольную раскраску $\rho$ множества вершин $V =$

$= V(H)$ в 2 цвета. Поскольку $H_1$ не обладает свойством $B_k$, то при раскраске $\rho$ множества $V(H_1) \subset V(H)$ существует ребро $A_i \in E(H_1)$, в котором не более чем $k-1$ вершина покрашена (без ограничения общности) в первый цвет. Далее, вершины из множества $V(H_2) \setminus \{x_1, \ldots, x_{2l-1}\}$ также имеют некоторые цвета в раскраске $\rho$. Поскольку гиперграф $H_2$ не обладает свойством $B_l$, у него есть ребро, в котором вершин одного из цветов меньше $l$. Это ребро может содержать все вершины $x_1, \ldots, x_{2l-1}$, а может и не содержать ни одной из этих вершин (других ребер в утверждениях 1 и 2 просто нет). Рассмотрим оба случая.

**Случай 1.** Все ребра гиперграфа $H_2$, не содержащие вершины $x_1, \ldots, x_{2l-1}$, покрашены правильно (то есть каждое ребро имеет по крайней мере $l$ вершин каждого цвета). Тогда найдется такой набор вершин $B_j$, что $B_j \cup \{x_1, \ldots, x_{2l-1}\} \in E(H_2)$ и ни одна из вершин $B_j$ не покрашена в цвет 1. В самом деле, если это не так, то вершины $x_1, \ldots, x_{l-1}$ можно покрасить в цвет 1, а вершины $x_l, \ldots, x_{2l-1}$ — в цвет 2 и гиперграф $H_2$ оказывается обладающим свойством $B_l$. Возьмем ребро $A_i \cup B_j$ гиперграфа $H$. Оно содержит не более $k-1$ вершин цвета 1, что противоречит изначальному предположению о наличии свойства $B_k$ у $H$.

**Случай 2.** Существует ребро $e \in E(H_2 \setminus \{x_1, \ldots, x_{2l-1}\})$, в котором вершин одного из цветов меньше $l$. Тогда, поскольку $e \in H$, гиперграф $H$ не обладает свойством $B_l$, а следовательно, и свойством $B_k$, ведь $k \geqslant l$. Опять получаем противоречие.

### 6.3. Доказательство утверждения 1

Докажем от противного. Пусть $H_l$ все же обладает свойством $B_l$. Тогда заметим, что в правильной раскраске существуют две возможности: либо ровно $l-1$ вершина среди $x_1, \ldots x_{2l-1}$ покрашена в один из цветов и $l$ вершин — в другой, либо $l-2$ вершины покрашены в один цвет и $l+1$ вершин — в другой. Очевидно, в обоих случаях среди ребер $\{c_1, \ldots c_{n-l+1}, a_{n-l+2}, \ldots, a_n\}$, где $c_i = a_i$ или $c_i = b_i$, найдется ребро, содержащее по крайней мере $n-l+1$ вершин одного цвета, а значит, вершин другого цвета — не более $l-1$. Противоречие.

### 6.4. Доказательство утверждения 2

Докажем от противного. Пусть $H_l$ все же обладает свойством $B_l$. Тогда заметим, что в каждом ребре $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_{2l-1}, y_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n-l+1$, все $y_i$ покрашены в один и тот же цвет, но тогда в ребре $A = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, очевидно, найдется $n-l+1$ вершин одного цвета, а значит, вершин другого цвета не больше $l-1$. Противоречие.

Гиперграф $H_l$ является критическим. Доказательство этого факта очевидно.

## Литература


1. *Erdős P.*, *Hajnal A.* On a property of families of sets // Acta Mathematica of the Academy of Sciences, Hungary.— 1961.— V. 12, N 1—2.— P. 87–123.

2. *Radhakrishnan J.*, *Srinivasan A.* Improved bounds and algorithms for hypergraph two-coloring // Random Structures and Algorithms.— 2000.— V. 16, N 1.— P. 4–32.

3. *Erdős P.* On a combinatorial problem, II // Acta Mathematica of the Academy of Sciences, Hungary.— 1964.— V. 15, N 3—4, P. 445—447.

4. *Шабанов Д. А.* Об одной комбинаторной задаче Эрдеша // Доклады РАН. — 2004.— Т. 396, № 2.— С. 166–169.

5. *Розовская А. П.* Экстремальные комбинаторные задачи для двухцветных раскрасок гиперграфов // Матем. заметки.— 2011.— Т. 90, № 4.— С. 584–598.

6. *Райгородский А. М.*, *Шабанов Д. А.* Задача Эрдеша–Хайнала о раскрасках гиперграфов, ее обобщения и смежные проблемы // УМН. — 2011.— Т. 66, вып. 5.— С. 109–182.

7. *Шабанов Д. А.* Экстремальные задачи для раскрасок равномерных гиперграфов // Известия РАН. — Сер. математическая.— 2007.— Т. 71, № 6.— С. 183–222.

8. *Abbott H. L.*, *Moser L.* On a combinatorial problem of Erdős and Hajnal // Canadian Mathematical Bullettin.— 1964.— V. 7.— P. 177—181.

9. *Abbott H. L.*, *Hanson D.* On a combinatorial problem of Erdős // Canadian Mathematical Bullettin.— 1969.— V. 12.— P. 823–829.

10. *Toft B.* On color critical hypergraphs // Infinite and Finite Sets, eds. A. Hajnal et. al.— Amsterdam: North Holland, 1975.— P. 1445–1457.

11. *Розовская А. П.*, *Титова М. В.*, *Шабанов Д. А.* О половинных раскрасках гиперграфов // Фундаментальная и прикладная математика.— 2009.— Т. 15, № 7.— С. 141–163.

12. *Kostochka A. V.*. Color-Critical Graphs and Hypergraphs with Few Edges: A Survey // More Sets, Graphs and Numbers. Bolyai Society Mathematical Studies, eds. E. Győri, G. O. H. Katona, L. Lovász.— V. 15.— Springer, 2006.— P. 175–198.

13. *Райгородский А. М.* Системы общих представителей в комбинаторике и их приложениях.— М.: МЦНМО, 2009.

*Поступила в редакцию 02.07.2011*