Раздел III

Хроматические числа пространств

УДК 519.174.7 + 519.154

А. Б. Купавский[1,2,4], *А. М. Райгородский*[1,3,4], *М. В. Титова*[3]

[1] Кафедра дискретной математики факультета инноваций и высоких технологий МФТИ;
[2] Кафедра теории чисел механико-математического факультета
МГУ им. М. В. Ломоносова;
[3] Кафедра математической статистики механико-математического факультета
МГУ им. М. В. Ломоносова;
[4] Отдел теоретических и прикладных исследований, ООО «Яндекс»

О плотнейших множествах без расстояния единица в пространствах малых размерностей

В данной работе мы исследуем значение максимальной верхней плотности подмножества $\mathbb{R}^d$, свободного от расстояния 1, при $d \leqslant 8$. Мы получаем новые нижние оценки указанной величины и применяем полученные результаты к решению одной задачи геометрической теории Рамсея.

Ключевые слова: верхняя плотность, множества без расстояния единица, хроматическое число пространства, числа Рамсея, дистанционные графы, решетки, упаковки.

1. Введение и формулировки результатов

1.1. Постановка задачи

В данной работе нас будут интересовать плотнейшие множества без расстояния единица. Напомним, что *на множестве $S \subseteq \mathbb{R}^n$ реализуется расстояние a*, если найдутся такие точки $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$, что $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = a$, где через $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ обозначено евклидово расстояние между точками $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в $\mathbb{R}^n$. В противном случае мы называем S *множеством без расстояния a*. Напомним также, что *верхней плотностью* измеримого по Лебегу множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$ называется величина

$$\overline{\delta}(A) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{V\left(A \cap B_n^{\mathbf{0}}(r)\right)}{V(B_n^{\mathbf{0}}(r))},$$

где $B_n^{\mathbf{0}}(r)$ обозначает шар радиуса r с центром в начале координат, а $V(X)$ — объем множества X.

Нам понадобится теперь определение классической величины $m_1(\mathbb{R}^n)$ (см., например, [1]):

$$m_1(\mathbb{R}^n) = \sup_{A \subseteq \mathbb{R}^n} \overline{\delta}(A),$$

где A — измеримое по Лебегу множество без расстояния единица.

Иными словами, $m_1(\mathbb{R}^n)$ — это наибольшая плотность, которую может иметь множество без расстояния единица в пространстве $\mathbb{R}^n$. Лучшие верхние оценки величины $m_1(\mathbb{R}^n)$ при $n = 2, \ldots, 24$ получены в работе [2].

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 12-01-00683, гранта Президента РФ № МД-666.2012.1 и гранта НШ-2519.2012.1 поддержки ведущих научных школ.

Понятие $m_1(\mathbb{R}^n)$ возникло в связи с известной задачей Нельсона–Хадвигера о нахождении хроматического числа пространства. Напомним, что *хроматическим числом* $\chi(\mathbb{R}^n)$ *пространства* $\mathbb{R}^n$ называется минимальное количество цветов, необходимое для такой раскраски всех точек пространства $\mathbb{R}^n$, что любые две из них на расстоянии единица покрашены в разные цвета:

$$\chi(\mathbb{R}^n) = \min\{\chi\colon \mathbb{R}^n = V_1 \sqcup \ldots \sqcup V_\chi \quad \forall i \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \neq 1\}.$$

Изучению величины $\chi(\mathbb{R}^n)$ посвящено множество работ (см., например, [1, 3—7]).

Измеримым хроматическим числом $\chi^m(\mathbb{R}^n)$ *пространства* $\mathbb{R}^n$ называют наименьшее число измеримых по Лебегу множеств без расстояния единица, в виде дизъюнктного объединения которых можно представить пространство $\mathbb{R}^n$.

Понятно, что $\chi(\mathbb{R}^n) \leqslant \chi^m(\mathbb{R}^n)$. С другой стороны, $\chi^m(\mathbb{R}^n) \geqslant 1/m_1(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, верхние оценки величины $m_1(\mathbb{R}^n)$ позволяют оценить снизу измеримое хроматическое число пространства $\mathbb{R}^n$.

Что касается нижних оценок $m_1(\mathbb{R}^n)$, то они помогают понять, какие оценки измеримого хроматического числа мы сможем получить в лучшем случае, используя для оценки величину $m_1(\mathbb{R}^n)$. С другой стороны, конструкции множеств без расстояния единица позволяют получать верхние оценки хроматического числа (как обычного, так и измеримого). Для этого достаточно покрыть пространство как можно меньшим числом таких множеств, и каждое множество покрасить в один цвет. Более того, имея достаточно плотное множество без расстояния единица, можно не строить покрытие явно, а пытаться применять технику, разработанную Роджерсом и Эрдешом (см. [8]).

Идеи получения нижних оценок мы рассмотрим в параграфе 1.3, но сначала в параграфе 1.2 напомним основные определения из теории упаковок (которые можно посмотреть в [3, 9]).

1.2. Определения из теории решеток и упаковок

Решеткой L_n в $\mathbb{R}^n$ называется множество всех целочисленных линейных комбинаций некоторых n линейно независимых векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, то есть

$$L_n = \left\{ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot \mathbf{v}_i,\ k_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Эти векторы называются *базисными векторами* решетки L_n.

Порождающей матрицей решетки называется матрица, составленная из ее базисных векторов.

Фундаментальной областью Λ решетки L_n называется множество точек

$$\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot \mathbf{v}_i,\ 0 \leqslant t_i < 1 \right\}.$$

Детерминантом решетки L_n называется модуль детерминанта ее порождающей матрицы M (или, что то же самое, объем фундаментальной области решетки L_n):

$$\det L_n = |\det M|.$$

Семейство $\mathscr{C} = \{C_1, C_2, \ldots\}$ компактных множеств с непустой внутренностью называется *упаковкой* в $\mathbb{R}^n$, если

$$\Omega = \bigcup_i C_i \subseteq \mathbb{R}^n$$

и никакие два из множеств C_i не имеют общей внутренней точки.

Мы будем говорить также, что множество Ω — *упаковка* в $\mathbb{R}^n$.

Если упаковка $\mathscr{C}$ в $\mathbb{R}^n$ состоит из копий некоторого измеримого множества $C \subset \mathbb{R}^n$, расположенных в каждой точке решетки L_n, то есть $\mathscr{C} = \{C + \mathbf{a} \,|\, \mathbf{a} \in L_n\}$, то $\mathscr{C}$ (а также и множество Ω) называется *решетчатой упаковкой.* Ее *плотностью* $\delta(\Omega)$ называют отношение объема множества C к объему фундаментальной области решетки L_n:

$$\delta(\Omega) = \frac{V(C)}{\det L_n}.$$

Заметим, что плотность $\delta(\Omega)$ решетчатой упаковки Ω равна верхней плотности $\overline{\delta}(\Omega)$ множества Ω, определенной в параграфе 1.1.

Многогранником Вороного $W_{L_n}^{\mathbf{a}}$ *решетки* L_n *в* $\mathbb{R}^n$ для данной точки решетки $\mathbf{a}$ называется множество точек пространства $\mathbb{R}^n$, которые по меньшей мере так же близки к данной точке, как и к любой другой точке решетки:

$$W_{L_n}^{\mathbf{a}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \leqslant |\mathbf{x} - \mathbf{b}| \ \ \forall\, \mathbf{b} \in L_n\}.$$

1.3. Идеи получения нижних оценок $m_1(\mathbb{R}^n)$

Простейший способ получения нижних оценок $m_1(\mathbb{R}^n)$ состоит в следующем. Рассмотрим решетку L_n, на которой реализуется плотнейшая упаковка шаров радиуса r в $\mathbb{R}^n$, и эту упаковку. Обозначим ее $\Omega(r)$. Пусть $B_n^{\mathbf{a}}(r)$ — (открытый) шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке решетки $\mathbf{a} \in L_n$ и радиусом r. Таким образом,

$$\Omega(r) = \bigcup_{\mathbf{a} \in L_n} B_n^{\mathbf{a}}(r).$$

Оставим центры шаров на месте, а радиус каждого шара уменьшим в два раза. Понятно, что в таком случае мы получим множество без расстояния r, которое равно диаметру новых шаров. При этом плотность полученного множества будет в 2^n раз меньше, чем плотность изначальной упаковки $\Omega(r)$. В общем случае это и есть лучшая известная нижняя оценка величины $m_1(\mathbb{R}^n)$.

В случае плоскости плотность лучшей упаковки равна $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.9069$. Таким образом, имеем

$$m_1(\mathbb{R}^2) \geqslant \frac{0.9069}{4} = 0.2267.$$

Однако Крофт приводит пример множества, имеющего плотность $0.2293\ldots$, улучшая эту оценку (см. [10] и раздел 2).

Основной целью данной работы является построение как можно более плотных множеств без расстояния единица в $\mathbb{R}^n$, $n = 3, \ldots, 8$, за счет чего мы получим лучшие нижние оценки величины $m_1(\mathbb{R}^n)$ при $n = 3, \ldots, 8$.

1.4. Основные результаты

Теорема 1. *Имеют место следующие неравенства:*

$$\begin{aligned} m_1(\mathbb{R}^3) &\geqslant 0.09877, & m_1(\mathbb{R}^6) &\geqslant 0.00806,\\ m_1(\mathbb{R}^4) &\geqslant 0.04413, & m_1(\mathbb{R}^7) &\geqslant 0.00352,\\ m_1(\mathbb{R}^5) &\geqslant 0.01833, & m_1(\mathbb{R}^8) &\geqslant 0.00165. \end{aligned}$$

Сравнить новые результаты с известными оценками можно в следующей таблице.

n	плотность плотнейшей упаковки шаров	известная верхняя оценка $m_1(\mathbb{R}^n)$ [2]	известная нижняя оценка $m_1(\mathbb{R}^n)$	новая нижняя оценка $m_1(\mathbb{R}^n)$
2	0.90689	0.26841	0.2293 [10]	—
3	0.74048	0.16560	0.09256	0.09877
4	0.61685	0.11293	0.03855	0.04413
5	0.46526	0.07528	0.01453	0.01833
6	0.37295	0.05157	0.00582	0.00806
7	0.29530	0.03612	0.00230	0.00352
8	0.25367	0.02579	0.00099	0.00165

В разделе 3 мы приведем подробное доказательство теоремы в случае $n = 3$, а в разделе 4 — доказательства для $n = 4, \ldots, 8$. Но прежде чем описывать результаты, нам понадобится рассмотреть конструкцию Крофта, что мы сделаем в следующем разделе.

2. Конструкция Крофта для $\mathbb{R}^2$

Рассмотрим декартовы координаты на плоскости. Построим правильный шестиугольник с центром в начале координат, стороной $\frac{\sqrt{3}}{3}$, одна из сторон которого параллельна вертикальной оси. Пересечем шестиугольник с кругом с центром в начале координат и таким радиусом r, что $\frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$ (r больше расстояния от центра шестиугольника до его стороны, но меньше, чем до вершины). Значение радиуса будет определено позже. Такое множество Крофт называет «tortoise» («черепаха»). Будем обозначать его $X^{\mathbf{0}}(r)$, где верхний индекс указывает на центр симметрии множества (в данном случае это начало координат).

Теперь рассмотрим на плоскости гексагональную решетку A_2 с порождающими векторами $(1, 0)$ и $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. В каждую точку $\mathbf{a}$ решетки A_2 поместим копию нашего множества $X^{\mathbf{0}}(r)$. Множество $K(r)$, рассмотренное Крофтом, представляет собой объединение таких копий, построенных в каждой точке решетки:

$$K(r) = \bigcup_{\mathbf{a} \in A_2} \left(\mathbf{a} + X^{\mathbf{0}}(r)\right) = \bigcup_{\mathbf{a} \in A_2} X^{\mathbf{a}}(r).$$

Далее к каждому из множеств $X^{\mathbf{a}}(r)$ применяется гомотетия с коэффициентом $k(r)$, чтобы в их объединении не стало некоторого расстояния, а затем радиус r подбирается таким образом, чтобы плотность получившегося множества была как можно больше.

Заметим, что гексагональная решетка A_2, использованная Крофтом для построения этого множества, является решеткой, на которой достигается плотнейшая упаковка шаров (кругов) на плоскости. Для построения подобных множеств в пространствах следующих размерностей мы будем использовать решетки с наибольшей известной плотностью упаковки шаров. А в качестве множеств, пересекаемых шарами, мы будем использовать многогранники Вороного данных решеток (правильный шестиугольник, в частности, является многогранником Вороного решетки A_2). В следующем разделе мы подробно опишем технологию получения плотного множества без некоторого расстояния в трехмерном пространстве.

3. Конструкция для $\mathbb{R}^3$

Известно, что наибольшая плотность упаковки шаров в $\mathbb{R}^3$ достигается на решетке D_3 с базисными векторами $(2,0,0)$, $(1,1,0)$ и $(1,0,1)$ (см. [9]). Возьмем эту решетку. Она состоит из точек (x,y,z), где x,y и z — целые числа, сумма которых четна. Детерминант решетки равен 2, минимальное расстояние между точками решетки равно $\sqrt{2}$, радиус упаковки равен $1/\sqrt{2}$, плотность упаковки — $0.74048\ldots$, а многогранник Вороного этой решетки — это ромбододекаэдр.

Рассмотрим многогранник Вороного $W_{D_3}^{\mathbf{0}}$ решетки D_3 для начала координат. Пересечем его с шаром $B_3^{\mathbf{0}}(r)$. Положим $X^{\mathbf{0}}(r) = B_3^{\mathbf{0}}(r) \cap W_{D_3}^{\mathbf{0}}$. Такие же множества поместим в каждую точку решетки. Пусть

$$\Omega(r) = \bigcup_{\mathbf{a}\in D_3} X^{\mathbf{a}}(r) = \bigcup_{\mathbf{a}\in D_3} \left(\mathbf{a} + X^{\mathbf{0}}(r)\right).$$

На радиус r шара $B_3^{\mathbf{0}}(r)$, с которым мы пересекаем многогранник Вороного, сразу следует поставить ограничения снизу и сверху. Во-первых, мы хотим, чтобы он был не меньше, чем расстояние от центра шара до грани многогранника (равное $1/\sqrt{2} = 0.7071\ldots$), чтобы их пересечение не представляло собой целиком весь шар. Итак, пусть это условие выполняется.

Во-вторых, нам удобней рассматривать такие значения r радиуса шара, при которых шар $B_3^{\mathbf{0}}(r)$ пересекается с многогранником Вороного по внутренностям граней, то есть когда многогранник отсекает от шара при пересечении с ним шаровые сегменты («шапки»). Так происходит в случае, когда радиус шара не больше, чем расстояние от центра шара (некоторой точки решетки) до любого ребра многогранника. Но ребро многогранника Вороного представляет собой множество точек, равноудаленных от некоторых трех точек решетки. Таким образом, нам достаточно рассмотреть три точки решетки с наименьшим радиусом описанной окружности и взять значение этого радиуса в качестве верхней границы r. С одной стороны, расстояние между точками решетки $\geqslant \sqrt{2}$. С другой стороны, несложно найти такие три точки решетки D_3, что все попарные расстояния будут в точности равны $\sqrt{2}$ — например, $(1,1,0)$, $(0,1,1)$ и $(0,0,0)$. Радиус описанной около них окружности равен $\sqrt{2/3} = 0.8164\ldots$ Итак, пусть $r \in [1/\sqrt{2}, \sqrt{2/3}]$.

Заметим, что так как многогранники Вороного, построенные во всех точках решетки, замощают пространство $\mathbb{R}^3$, то и пересеченные с шарами копии многогранника не имеют пересечений. Значит, множество $\Omega(r)$ образует упаковку в $\mathbb{R}^3$, при этом диаметр множества $X^{\mathbf{0}}(r)$ равен $2r$. Найдем плотность $\delta(\Omega(r))$ множества $\Omega(r)$:

$$\delta(\Omega(r)) = \frac{V(X^{\mathbf{0}}(r))}{\det D_3} = \frac{V(X^{\mathbf{0}}(r))}{2}.$$

Теперь применим к $X^{\mathbf{a}}(r)$, $\mathbf{a} \in D_3$, такую гомотетию с центром в точке $\mathbf{a}$ и неизвестным пока коэффициентом $k = k(r)$, чтобы в полученном множестве

$$\tilde{\Omega}(r) = \bigcup_{\mathbf{a}\in D_3} (\mathbf{a} + kX^{\mathbf{0}}(r))$$

не было некоторого расстояния.

Найдем нужный коэффициент гомотетии. Диаметр множества

$$kX^{\mathbf{0}}(r) = k(B_3^{\mathbf{0}}(r) \cap W_{D_3}^{\mathbf{0}})$$

равен $2kr$. А так как множества $W^{\mathbf{a}}_{D_3}$ образуют упаковку и минимальное расстояние между точками решетки равно $\sqrt{2}$, то расстояние между ближайшими точками различных копий $kX^{\mathbf{0}}(r)$ не меньше, чем $\sqrt{2}(1-k)$. Таким образом, максимальное k, при котором в множестве $\tilde{\Omega}(r)$ не будет реализовано какое-то расстояние, находится из уравнения $\sqrt{2}(1-k) = 2rk$. Получаем: $k = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}r}$. Итак, плотность равна

$$\delta(\tilde{\Omega}(r)) = \delta(\Omega(r))k^3 = \frac{V(X^{\mathbf{0}}(r))}{2(1+\sqrt{2}r)^3}.$$

Осталось только найти $V(X^{\mathbf{0}}(r))$ и такое значение радиуса шаров r, при котором мы получим наибольшую плотность нашей упаковки.

Каждая из двенадцати граней ромбододекаэдра отсекает от шара «шапку», объем которой равен

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{r} \pi(r^2-x^2)dx = \frac{2}{3}\pi r^3 - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(r^2 - \frac{1}{6}\right).$$

Вычтем из объема шара $B^{\mathbf{0}}_3(r)$ объем двенадцати «шапок»:

$$V(X^{\mathbf{0}}(r)) = \frac{4}{3}\pi r^3 - 12\left(\frac{2}{3}\pi r^3 - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(r^2-\frac{1}{6}\right)\right).$$

Локальный максимум функции $\delta(\tilde{\Omega}(r))$ на отрезке $r \in [1/\sqrt{2}, \sqrt{2/3}]$ достигается при $r = 0.7729\ldots$ и равен $0.09877\ldots$ Таким образом, теорема в случае $n = 3$ доказана.

4. Результаты в случаях $n = 4, \ldots, 8$

4.1. $n = 4$

Плотнейшая упаковка шаров в $\mathbb{R}^4$ достигается на решетке D_4, плотность этой упаковки равна $0.6168\ldots$ Решетку представляют точки с целыми координатами, сумма которых четна. Минимальное расстояние между точками решетки равно $\sqrt{2}$, базисные векторы $(2,0,0,0)$, $(1,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$, $(1,0,0,1)$, детерминант решетки равен 2, коэффициент гомотетии k тот же, что и в случае $n = 3$: $k = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}r}$. Многогранник Вороного решетки D_4 — правильный 24-гранник в $\mathbb{R}^4$ (см. [9]).

Аналогично случаю $n = 3$, строим множество $X^{\mathbf{0}}(r)$, которое теперь равно $B^{\mathbf{0}}_4(r) \cap W^{\mathbf{0}}_{D_4}$. Радиус шара $B^{\mathbf{0}}_4(r)$ мы хотим сделать таким, чтобы он был не меньше расстояния от центра шара до гиперграни многогранника Вороного $W^{\mathbf{0}}_{D_4}$ и не больше, чем расстояние до любой из его граней коразмерности два, чтобы шар $B^{\mathbf{0}}_4(r)$ пересекал многогранник по внутренностям гиперграней. Сразу скажем, что как для решетки D_4, так и для решеток D_5 и $E_n, n = 6, 7, 8$, которые мы будем рассматривать при доказательстве теоремы в случаях $n = 5, \ldots, 8$, эти условия снова выполняются при $r \in [1/\sqrt{2}, \sqrt{2/3}]$.

Вычтем из объема шара $B^{\mathbf{0}}_4(r)$ объем 24 «шапок», отсекаемых гранями многогранника, чтобы получить объем множества $X^{\mathbf{0}}(r)$:

$$V(X^{\mathbf{0}}(r)) = \frac{\pi^2 r^4}{2} - 24\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{r} \frac{4\pi}{3}\left(r^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx.$$

Плотность упаковки в зависимости от r равна

$$\delta(\tilde{\Omega}(r)) = \delta(\Omega(r))k^4 = \frac{k^4 V(X^{\mathbf{0}})}{\det D_4} = \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}r}\right)^4 \frac{V(X^{\mathbf{0}}(r))}{2}.$$

Локальный максимум функции $\delta(\tilde{\Omega}(r))$ как функции от r на отрезке $r \in [1/\sqrt{2}, \sqrt{2/3}]$ достигается при $r = 0.79469\ldots$ и равен $0.04413\ldots$ Теорема в случае $n = 4$ доказана.

4.2. $n = 5$

Плотнейшая упаковка шаров в $\mathbb{R}^5$ достигается на решетке D_5, плотность этой упаковки равна $0.4652\ldots$ Решетку составляют точки с целыми координатами, сумма которых четна. Минимальное расстояние между точками решетки равно $\sqrt{2}$, базисные векторы $(2,0,0,0,0)$, $(1,1,0,0,0)$, $(1,0,1,0,0)$, $(1,0,0,1,0)$, $(1,0,0,0,1)$, детерминант решетки равен 2, $k = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}r}$. Многогранник Вороного решетки D_5 — 40-гранник в $\mathbb{R}^5$ (см. [9]).

Как мы знаем, при $r \in [1/\sqrt{2}, \sqrt{2/3}]$ многогранник Вороного $W^{\mathbf{0}}_{D_5}$ отсекает от шара $B^{\mathbf{0}}_5(r)$ при пересечении с ним «шапки». При бóльших значениях радиуса шар $B^{\mathbf{0}}_5(r)$ пересекает грани многогранника коразмерности два. Таким образом, чтобы посчитать объем множества $X^{\mathbf{0}}(r) = B^{\mathbf{0}}_5(r) \cap W^{\mathbf{0}}_{D_5}$ при $r \geqslant \sqrt{2/3}$, нужно вычесть из объема $B^{\mathbf{0}}_5(r)$ объем сорока «шапок», а затем прибавить объем их пересечений. Мы же напишем оценку снизу:

$$V(X^{\mathbf{0}}(r)) \geqslant \frac{4}{15}\pi^2 r^5 - 40\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{r} \frac{\pi^2}{2}\left(r^2 - x^2\right)^2 dx =: t(r).$$

Найдем значение величины $\delta(\tilde{\Omega}(r))$ в зависимости от r:

$$\delta(\tilde{\Omega}(r)) = \delta(\Omega(r))k^5 = \frac{k^5 V(X^{\mathbf{0}}(r))}{\det D_5} = \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}r}\right)^5 \frac{V(X^{\mathbf{0}}(r))}{2} \geqslant \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}r}\right)^5 \frac{t(r)}{2} =: t'(r).$$

Локальный максимум функции $t'(r)$ на отрезке $r \in [1/\sqrt{2}, 1]$ достигается при $r = 0.81762\ldots$ и равен $0.01833\ldots$ Таким образом, выполняется неравенство $m_1(\mathbb{R}^5) \geqslant 0.01833$, и теорема в случае $n = 5$ доказана.

4.3. $n = 6$

Плотнейшая упаковка шаров в $\mathbb{R}^6$ достигается на решетке E_6, плотность этой упаковки равна $0.37295\ldots$ Минимальное расстояние между точками решетки равно $\sqrt{2}$. Детерминант решетки равен $\sqrt{3}$, $k = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}r}$. Многогранник Вороного решетки E_6 — 72-гранник в $\mathbb{R}^6$ (см. [9]).

Вычтем из объема шара $B^{\mathbf{0}}_6(r)$ объем 72 шапок, отсекаемых гранями многогранника, чтобы получить нижнюю оценку объема множества $X^{\mathbf{0}}(r) = B^{\mathbf{0}}_6(r) \cap W^{\mathbf{0}}_{E_6}$:

$$V(X^{\mathbf{0}}(r)) \geqslant \frac{\pi^3}{6} r^6 - 72\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{r} \frac{4\pi^2}{15}(r^2 - x^2)^{\frac{5}{2}} dx =: t(r).$$

Найдем значение величины $\delta(\tilde{\Omega}(r))$ в зависимости от r:

$$\delta(\tilde{\Omega}(r)) = \delta(\Omega(r))k^6 = \frac{k^6 V(X^{\mathbf{0}}(r))}{\det E_6} = \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}r}\right)^6 \frac{V(X^{\mathbf{0}}(r))}{\sqrt{3}} \geqslant \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}r}\right)^6 \frac{t(r)}{\sqrt{3}} =: t'(r).$$

Локальный максимум функции $t'(r)$ на отрезке $r \in [1/\sqrt{2}, 1]$ достигается при $r = 0.82886\ldots$ и равен $0.00806\ldots$ Таким образом, $m_1(\mathbb{R}^6) \geqslant 0.00806$. Теорема в случае $n = 6$ доказана.

4.4. $n = 7$

Плотнейшая упаковка шаров в $\mathbb{R}^7$ достигается на решетке E_7, плотность этой упаковки равна $0.2953\ldots$ Минимальное расстояние между точками решетки равно $\sqrt{2}$. Детерминант решетки равен $\sqrt{2}$, $k = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}r}$. Многогранник Вороного решетки E_7 — 126-гранник в $\mathbb{R}^7$ (см. [9]).

Вычтем из объема шара $B_7^{\mathbf{0}}(r)$ объем 126 шапок, отсекаемых гранями многогранника, чтобы получить нижнюю оценку объема множества $X^{\mathbf{0}}(r) = B_7^{\mathbf{0}}(r) \cap W_{E_7}^{\mathbf{0}}$:

$$V(X^{\mathbf{0}}(r)) \geqslant \frac{2^4}{7!!}\pi^3 r^7 - 126 \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{r} \frac{\pi^3}{3!}\left(r^2 - x^2\right)^3 dx =: t(r).$$

Найдем значение величины $\delta(\tilde{\Omega}(r))$ в зависимости от r:

$$\delta(\tilde{\Omega}(r)) = \delta(\Omega(r))k^7 = \frac{k^7 V(X^{\mathbf{0}}(r))}{\det E_7} = \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}r}\right)^7 \frac{V(X^{\mathbf{0}}(r))}{\sqrt{2}} \geqslant \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}r}\right)^7 \frac{t(r)}{\sqrt{2}} =: t'(r).$$

Локальный максимум функции $t'(r)$ на отрезке $r \in [1/\sqrt{2}, 1]$ достигается при $r = 0.83787\ldots$ и равен $0.00352\ldots$ Таким образом, $m_1(\mathbb{R}^7) \geqslant 0.00352$. Теорема в случае $n = 7$ доказана.

4.5. $n = 8$

Плотнейшая упаковка шаров в $\mathbb{R}^8$ достигается на решетке E_8, плотность этой упаковки равна $0.25367\ldots$ Минимальное расстояние между точками решетки равно $\sqrt{2}$. Детерминант решетки равен 1, $k = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}r}$. Многогранник Вороного решетки E_8 — 240-гранник в $\mathbb{R}^8$ (см. [9]).

Вычтем из объема шара $B_8^{\mathbf{0}}(r)$ объем 240 шапок, отсекаемых гранями многогранника, чтобы получить нижнюю оценку объема множества $X^{\mathbf{0}}(r) = B_8^{\mathbf{0}}(r) \cap W_{E_8}^{\mathbf{0}}$:

$$V(X^{\mathbf{0}}(r)) \geqslant \frac{\pi^4}{4!} r^8 - 240 \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{r} \frac{2^4\pi^3}{7!!}(r^2 - x^2)^{\frac{7}{2}} dx =: t(r).$$

Найдем значение величины $\delta(\tilde{\Omega}(r))$ в зависимости от r:

$$\delta(\tilde{\Omega}(r)) = \delta(\Omega(r))k^8 = \frac{k^8 V(X^{\mathbf{0}}(r))}{\det E_8} = \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}r}\right)^8 V(X^{\mathbf{0}}(r)) \geqslant \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}r}\right)^8 t(r) =: t'(r).$$

Локальный максимум функции $t'(r)$ на отрезке $r \in [1/\sqrt{2}, 1]$ достигается при $r = 0.84017\ldots$ и равен $0.00165\ldots$ Таким образом, $m_1(\mathbb{R}^8) \geqslant 0.00165$. Теорема в случае $n = 8$ доказана.

5. Приложение результатов в задаче о дистанционных подграфах графов в пространствах малых размерностей

Напомним, что *дистанционным графом в n-мерном евклидовом пространстве* называется граф $G = (V, E)$, в котором множество вершин составляют точки пространства $\mathbb{R}^n$ и для которого выполнено

$$\forall\, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E \;\; |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = a,$$

где a — фиксированное положительное число.

Так как значение числа a в данном определении не существенно, мы будем рассматривать далее только дистанционные графы с $a = 1$.

Изучение различных свойств дистанционных графов, подобно задаче о плотнейших множествах без расстояния единица, связано с проблемой Нельсона–Хадвигера о нахождении хроматического числа пространства $\mathbb{R}^n$. Согласно теореме Эрдеша–де Брейна (см. [11]), $\chi(\mathbb{R}^n) = \chi(H)$ для некоторого конечного дистанционного графа H, где $\chi(H)$ — обычное *хроматическое число графа* (см. [12]). Именно поэтому ставится задача об изучении свойств *конечных* дистанционных графов.

Обзор результатов относительно дистанционных графов можно найти в книге [3].

В работе [13] был предложен подход к задаче с точки зрения теории Рамсея (см. [14, 15]). А именно, рассматривается такая модификация классического числа Рамсея $R(s,t)$ (см., например, [15, 16]), как *дистанционное число Рамсея* $R_{\mathrm{NEH}}(s,t,n)$: это такое минимальное натуральное число m, что для любого графа G на m вершинах либо в G содержится индуцированный подграф на s вершинах, изоморфный некоторому дистанционному графу в $\mathbb{R}^n$, либо в его дополнении $\bar{G}$ до полного графа K_m содержится индуцированный подграф на t вершинах, изоморфный некоторому дистанционному графу в $\mathbb{R}^n$.

Понятие $R_{\mathrm{NEH}}(s,t,n)$ было исследовано в работах [13] и [17]. Так как любой граф, в котором нет ребер, реализуется в произвольной размерности в качестве дистанционного графа, то с очевидностью выполнено следующее неравенство: $R_{\mathrm{NEH}}(s,t,n) \leqslant R(s,t)$. Однако принципиально лучшие верхние оценки не известны.

В заметке [13] получены нижние оценки величины $R_{\mathrm{NEH}}(s,t,n)$. Для случаев $n = 2, \ldots, 8$ лучшей из них являлась следующая:

$$R_{\mathrm{NEH}}(s,s,n) \geqslant R\left(\left[\frac{s}{\chi(\mathbb{R}^n)}\right], \left[\frac{s}{\chi(\mathbb{R}^n)}\right]\right),$$

где через $[\cdot]$ обозначена целая часть числа.

В работе [17] эти оценки улучшены в случаях $n = 2$ и $n = 3$ за счет использования множеств без расстояния единица на плоскости (в трехмерном пространстве), которые допускают размещение без пересечений четырех (восьми) своих копий, полученных в результате некоторых параллельных переносов, в $\mathbb{R}^2$ (в $\mathbb{R}^3$).

В той же работе получены и более точные асимптотические оценки (при сравнении оценок $R_{\mathrm{NEH}}(s,s,n)$ мы обсуждаем только случай $s \to \infty$):

Теорема 2. *Существует такая константа $c > 0$, что*

$$R_{\mathrm{NEH}}(s,s,2) \geqslant 2^{\frac{s}{2} - c\, s^{\frac{1}{3}} \ln s}.$$

Теорема 3. *Существует такая константа $c > 0$, что*

$$R_{\mathrm{NEH}}(s,s,3) \geqslant 2^{\frac{s}{2} - c\,\beta(s) s^{\frac{1}{2}} \ln s},$$

где $\beta(s) = 2^{\alpha^2(s)}$, а $\alpha(s)$ — обратная функция Аккермана.

Однако метод, с помощью которого получены эти теоремы, не может быть использован для $\mathbb{R}^n, n \geqslant 4$, поэтому аналогичных теорем при $n = 4, \ldots, 8$ сформулировать нельзя.

Множества без расстояния единица, построенные при доказательстве теоремы 1 и позволившие нам получить оценки $m_1(\mathbb{R}^n), n = 3, \ldots, 8$, допускают размещение в $\mathbb{R}^n$ без пересечений 2^n своих копий, полученных в результате некоторых параллельных переносов. Поэтому с помощью технологии, подробное описание которой можно посмотреть в [17], мы получаем нижние оценки величины $R_{\mathrm{NEH}}(s, s, n), n = 3, \ldots, 8$. В случае $n = 3$ лучшей оценкой остается полученная в теореме 3. Но при $n = 4, \ldots, 8$ мы получаем новые нижние оценки для $R_{\mathrm{NEH}}(s, s, n)$.

Теорема 4. *Имеют место следующие неравенства:*

$$R_{\mathrm{NEH}}(s,s,3) \geqslant \frac{1}{8\sqrt[8]{8}e}(1+o(1))k2^{\frac{k}{16}}, \qquad \text{где } k = 8\,[0.09877s]\,;$$
$$R_{\mathrm{NEH}}(s,s,4) \geqslant \frac{1}{16\sqrt[16]{128}e}(1+o(1))k2^{\frac{k}{32}}, \qquad \text{где } k = 16\,[0.04413s]\,;$$
$$R_{\mathrm{NEH}}(s,s,5) \geqslant \frac{1}{32\cdot 2^{\frac{15}{32}}e}(1+o(1))k2^{\frac{k}{64}}, \qquad \text{где } k = 32\,[0.01833s]\,;$$
$$R_{\mathrm{NEH}}(s,s,6) \geqslant \frac{1}{64\cdot 2^{\frac{31}{64}}e}(1+o(1))k2^{\frac{k}{128}}, \qquad \text{где } k = 64\,[0.00806s]\,;$$
$$R_{\mathrm{NEH}}(s,s,7) \geqslant \frac{1}{128\cdot 2^{\frac{63}{128}}e}(1+o(1))k2^{\frac{k}{256}}, \qquad \text{где } k = 128\,[0.00352s]\,;$$
$$R_{\mathrm{NEH}}(s,s,8) \geqslant \frac{1}{256\cdot 2^{\frac{127}{256}}e}(1+o(1))k2^{\frac{k}{512}}, \qquad \text{где } k = 256\,[0.00165s]\,.$$

Таким образом, текущая картина следующая: при $n = 2$ и $n = 3$ наилучшие оценки величины $R_{\mathrm{NEH}}(s, s, n)$ содержатся в теоремах 2 и 3 из работы [17]; при $n = 4, \ldots, 8$ самые точные оценки дает теорема 4; а при бо́льших значениях n лидируют оценки из статьи [13].

Литература

1. *Székely L. A.* Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems // J. Bolyai Math. Soc. — 2002. — V. 11. — P. 649–666.
2. *de Ol. Filho F. M.*, *Vallentin F.* Fourier analysis, linear programming, and densities of distance avoiding sets in R^n // Eur. Math. Soc.— 2010.— V. 12.— P. 1417—1428.
3. *Brass P., Moser W., Pach J.* Research problems in discrete geometry. — Berlin: Springer, 2005.
4. *Райгородский А. М.* Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // УМН. — 2001.— Т. 56, вып. 1. — С. 107–146.
5. *Agarwal P. K.*, *Pach J.* Combinatorial geometry. — New York: John Wiley and Sons Inc., 1995.
6. *Klee V.*, *Wagon S.* Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory. — Math. Association of America, 1991.
7. *Райгородский А. М.* Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. — М.: МЦНМО, 2007.
8. *Erdős P.*, *Rogers C. A.* Covering space with convex bodies // Acta Arithmetica.— 1962.— V. 7.— P. 281—285.
9. *Конвей Дж.*, *Слоэн Н.* Упаковки шаров, решетки и группы.— М.: Мир, 1990.

10. *Croft H. T.* Incident incidents // Eureka (Cambridge).— 1967.— V. 30.— P. 22—26.

11. *de Bruijn N. G.*, *Erdős P.* A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations // Proc. Koninkl. Nederl. Acad. Wet. Ser. A. — 1951. — V. 54, N 5. — P. 371–373.

12. *Харари Ф.* Теория графов.— М.: Мир, 1973.

13. *Райгородский А. М.* Об одной серии задач рамсеевского типа в комбинаторной геометрии // Доклады РАН. — 2007.— Т. 413, № 2.— С. 171—173.

14. *Ramsey F. P.* On a problem of formal logic // Proc. London Math. Soc.— Ser. 2.— 1930.— V. 30.— P. 264—286.

15. *Graham R. L.*, *Rothschild B. L.*, *Spencer J. H.* Ramsey theory.— New York: John Wiley and Sons, 1990.

16. *Райгородский А. М.* Вероятность и алгебра в комбинаторике.— М.: МЦНМО, 2010.

17. *Райгородский А. М.*, *Титова М. В.* О дистанционных подграфах графов в пространствах малых размерностей // Современная математика и ее приложения.— 2011.— Т. XX. — С. 75—83.

Поступила в редакцию 18.06.2011