УДК 519.174.7

*Е. И. Пономаренко*[2], *А. М. Райгородский*[1,2,3]

[1] Кафедра дискретной математики факультета инноваций и высоких технологий МФТИ;
[2] Кафедра математической статистики механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова;
[3] Отдел теоретических и прикладных исследований, ООО «Яндекс»

# О хроматическом числе пространства $\mathbb{Q}^n$

Работа посвящена классической проблеме Нелсона–Хадвигера о хроматическом числе пространства. Мы рассматриваем обобщение проблемы на случай пространства $\mathbb{Q}^n$. Мы вводим новую величину $\chi_{\text{aff}}(\mathbb{Q}^n)$, равную максимальному значению хроматического числа дистанционного графа, вершины которого расположены в некотором аффинном подпространстве размерности $n$ некоторого пространства $\mathbb{Q}^m$, а ребра порождены рациональным расстоянием. Доказаны новые оценки для этой величины.

**Ключевые слова:** хроматическое число пространства, рациональное пространство.

## 1. Постановка задачи. Формулировки результатов

Определим $\chi(\mathbb{R}^n)$ — *хроматическое число вещественного евклидова пространства* — как минимальное число цветов, в которые можно так покрасить $\mathbb{R}^n$, чтобы не было одноцветных точек на расстоянии 1 (мы *запрещаем* точкам одного цвета отстоять друг от друга на расстояние 1). Задача об изучении хроматического числа впервые была поставлена Э. Нелсоном в 1950 году; похожая задача рассматривалась ранее Г. Хадвигером (см. [1]). В настоящий момент известны следующие асимптотические результаты:

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant (\zeta_1 + o(1))^n, \quad \zeta_1 = 1.239\ldots,$$

— нижняя оценка, полученная в работе [2], и

$$\chi(\mathbb{R}^n) \leqslant (3 + o(1))^n$$

— верхняя оценка, найденная в статье [3].

Для дальнейших целей нам будет удобно дать определение величины $\chi(\mathbb{R}^n)$ в терминах теории графов. А именно, назовем *вещественным дистанционным графом* (или *вещественным графом расстояний*) любой граф $G = (V, E)$, у которого

$$V \subseteq \mathbb{R}^n, \quad E \subseteq \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}: \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = a\}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Понятно, что

$$\chi(\mathbb{R}^n) = \max\{\chi(G)\colon G \text{ — вещественный дистанционный граф в } \mathbb{R}^n\},$$

где $\chi(G)$ — это обычное хроматическое число графа, равное наименьшему количеству цветов, в которые можно так покрасить вершины графа, чтобы вершины, соединенные

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 12-01-00683, гранта Президента РФ № МД-666.2012.1, гранта поддержки ведущих научных школ НШ-2519.2012.1.

ребром, были разноцветными. Более того, известно, что при взятии максимума можно ограничиться лишь конечными дистанционными графами (см. [4]).

Таким образом, оценка $\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant (\zeta_1 + o(1))^n$ равносильна утверждению о том, что существуют такая последовательность конечных вещественных графов расстояний $G_n \subset \mathbb{R}^n$ и такая последовательность чисел $\delta_n \to 0$, $n \to \infty$, что $\chi(G_n) \geqslant (\zeta_1 + \delta_n)^n$.

В 1976 году М. Бенда и М. Перлес предложили естественное обобщение задачи о величине $\chi(\mathbb{R}^n)$ (см. [5]). Они определили $\chi(\mathbb{Q}^n)$ — *хроматическое число рационального евклидова пространства* — как минимальное число цветов, в которые можно так покрасить $\mathbb{Q}^n$, чтобы не было одноцветных точек на расстоянии 1. Верхняя оценка

$$\chi(\mathbb{Q}^n) \leqslant \chi(\mathbb{R}^n) \leqslant (3 + o(1))^n$$

до сих пор никем не улучшена, а самая сильная на данный момент нижняя оценка, полученная в работе [6], имеет вид

$$\chi(\mathbb{Q}^n) \geqslant (\zeta_2 + o(1))^n, \quad \zeta_2 = 1.173\ldots$$

Здесь тоже полезна теоретико-графовая терминология. Назовем *вполне рациональным дистанционным графом* (или *вполне рациональным графом расстояний*) любой граф $G = (V, E)$, у которого

$$V \subseteq \mathbb{Q}^n, \qquad E \subseteq \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = a\}, \qquad a \in \mathbb{Q}.$$

С учетом результата [4] вновь имеем

$$\chi(\mathbb{Q}^n) = \max\{\chi(G)\colon G \text{ — конечный вполне рациональный дистанционный граф в } \mathbb{Q}^n\}.$$

И снова оценка $\chi(\mathbb{Q}^n) \geqslant (\zeta_2 + o(1))^n$ равносильна утверждению о том, что существуют такая последовательность конечных вполне рациональных графов расстояний $G_n \subset \mathbb{Q}^n$ и такая последовательность чисел $\delta_n \to 0$, $n \to \infty$, что $\chi(G_n) \geqslant (\zeta_2 + \delta_n)^n$.

Видно, что разница между результатами $\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant (\zeta_1 + o(1))^n$ и $\chi(\mathbb{Q}^n) \geqslant (\zeta_2 + o(1))^n$ связана с различием между последовательностями вещественных и вполне рациональных графов. Оказывается, в большей степени здесь играет роль не то, что у вполне рациональных графов вершины рациональны, но то, что у них рациональны длины ребер. А именно, можно показать (см. [6]), что для величины

$$\chi_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n) = \max\{\chi(G)\colon G \text{ — конечный частично рациональный дистанционный граф в } \mathbb{Q}^n\}$$

выполнена оценка $\chi_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n) \geqslant (\zeta_1 + o(1))^n$. Здесь *частично рациональный дистанционный граф* — это граф, который отличается от вполне рационального заменой условия $a \in \mathbb{Q}$ условием $a \in \mathbb{R}$.

В свете обозначения $\chi_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n)$ разумно ввести и обозначение $\chi_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n) = \chi(\mathbb{Q}^n)$. Отметим, что для пространства $\mathbb{R}^n$ между величинами $\chi_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ и $\chi_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^n)$ (которые легко определить) никакой разницы нет.

Итак, мы знаем, что $\chi_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n) \geqslant (\zeta_1 + o(1))^n$, а $\chi_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n) \geqslant (\zeta_2 + o(1))^n$. На самом деле можно даже показать, что $\limsup\limits_{n\to\infty} \chi_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n) \geqslant (\zeta_1 + o(1))^n$, т.е. существуют такая последовательность размерностей $n_i$, такая последовательность конечных вполне рациональных графов расстояний $G_{n_i} \subset \mathbb{Q}^{n_i}$ и такая последовательность чисел $\delta_{n_i} \to 0$, $i \to \infty$, что $\chi(G_{n_i}) \geqslant (\zeta_1 + \delta_{n_i})^{n_i}$. Спрашивается, можно ли что-то подобное сказать про *все* размерности. Разумеется, самым прямым ответом на вопрос была бы оценка $\chi_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n) \geqslant (\zeta_1 + o(1))^n$. Однако ее установить не удается. Удается сделать нечто иное.

Зачастую вполне рациональный граф с вершинами в $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ лежит в некотором аффинном подпространстве $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ размерности $m < n$. Вообще говоря, его нельзя считать в этом случае вполне рациональным графом в $\mathbb{Q}^m$, ведь во внутренних координатах пространства $\Pi$ рациональные (и даже целые) точки могут стать иррациональными. Тем не менее мы можем говорить о том, что *аффинная размерность* $\mathrm{affdim}\, G$ вполне рационального графа $G$ не превосходит $m$. Положим

$$\chi_{\mathrm{aff}}(\mathbb{Q}^n) = \max\{\chi(G)\colon G \text{ — конечный вполне рациональный дистанционный граф с } \mathrm{affdim}\, G \leqslant n\}.$$

Справедлива

**Теорема 1.** *Имеет место оценка*

$$\chi_{\mathrm{aff}}(\mathbb{Q}^n) \geqslant \chi_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n) \geqslant (\zeta_1 + o(1))^n. \tag{1}$$

*А именно, существуют такая последовательность конечных вполне рациональных графов расстояний $G_n \subset \mathbb{Q}^{4n}$ с $\mathrm{affdim}\, G_n \leqslant n$ и такая последовательность чисел $\delta_n \to 0$, $n \to \infty$, что $\chi(G_n) \geqslant \chi_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n) \geqslant (\zeta_1 + \delta_n)^n$.*

Теорема 1 дает некоторый ответ на поставленный нами вопрос о хроматических числах вполне рациональных графов во всех размерностях. Минус ее в том, что эти размерности аффинные, а плюс в том, что «настоящие» размерности не сильно от аффинных отличаются — не более чем в 4 раза.

Заметим, что неверно равенство $\chi_{\mathrm{aff}}(\mathbb{Q}^n) = \chi_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n)$. Например, в $\mathbb{Q}^4$ есть равносторонние треугольники с длинами сторон 1. Иными словами, $\chi_{\mathrm{aff}}(\mathbb{Q}^2) \geqslant 3$. Однако еще в работе [5] показано, что $\chi_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^2) = 2$. Таким образом, вообще говоря, $\chi_{\mathrm{aff}}(\mathbb{Q}^n) > \chi_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n)$.

В то же время очевидно, что $\chi_{\mathrm{aff}}(\mathbb{Q}^n) \leqslant \chi(\mathbb{R}^n)$. С одной стороны, это означает, что у нас нет шансов сколь-нибудь принципиально улучшить оценку (1). С другой стороны, мы имеем новую величину, которая почти наверняка не совпадает ни с одной из ранее изучавшихся. Иными словами, мы предполагаем, что каждое из строгих неравенств в следующей цепочке выполнено хотя бы в некоторых размерностях:

$$\chi_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n) < \chi_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n) < \chi_{\mathrm{aff}}(\mathbb{Q}^n) < \chi(\mathbb{R}^n).$$

Второе из неравенств, как мы знаем, имеет место хотя бы для $n = 2$. Первое неравенство справедливо при $n = 3$. В самом деле, $\chi_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^3) = 2$ (см. [5]). Однако точки $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ образуют частично рациональный треугольник в $\mathbb{Q}^3$, и, стало быть, $\chi_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^3) \geqslant 3$. Любопытно, что $\chi_{\mathrm{aff}}(\mathbb{Q}^3) \geqslant 4$, т.к. вполне рациональные симплексы на четырех вершинах (правильные тетраэдры со стороной 1) существуют во всех достаточно больших размерностях (см. [7]). И более того, $\chi(\mathbb{R}^3) \geqslant 6$ (см. [8]). Кажется довольно правдоподобным, что уже для $n = 3$ все три величины различны.

## 2. Доказательство теоремы 1

Пусть $G_n = (V_n, E_n)$ — последовательность таких частично рациональных графов, что $\chi(G_n) = \chi_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n)$. Далее, пусть длина ребра каждого из графов $G_n$ равна $t$. Ясно, что $t = \sqrt{s}$, где $s \in \mathbb{Q}$. Выберем такие рациональные числа $a, b, c, d$, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = s$. Это можно сделать за счет классической теоремы Лагранжа о представлении произвольного целого числа в виде суммы не более четырех квадратов целых чисел.

Рассмотрим произвольную вершину $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in V_n$. Поставим ей в соответствие вектор

$$\mathbf{x}^* = (ax_1, \ldots, ax_n, bx_1, \ldots, bx_n, cx_1, \ldots, cx_n, dx_1, \ldots, dx_n).$$

Обозначим через $V_n^*$ множество всех таких $\mathbf{x}^*$. Разумеется, мы, тем самым, получим биекцию между $V_n$ и $V_n^*$. Посмотрим, во что при этой биекции перейдут ребра. Пусть $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in E_n$. Тогда

$$|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}^*| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = s \in \mathbb{Q}.$$

Таким образом, граф $G_n^* = (V_n^*, E_n^*)$ вполне рационален. Однако он изоморфен исходному графу, и, стало быть, $\chi(G_n^*) = \chi(G_n) = \chi_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n)$. Теорема доказана.

## Литература


1. *Hadwiger H.* Ein Überdeckungssatz für den Euklidischen Raum // Portugaliae Math. — 1944. — V. 4. — P. 140–144.
2. *Райгородский А. М.* О хроматическом числе пространства // УМН. — 2000. — Т. 55, вып. 2. — С. 147–148.
3. *Larman D. G.*, *Rogers C. A.* The realization of distances within sets in Euclidean space // Mathematika. — 1972. — V. 19. — P. 1–24.
4. *de Bruijn N. G.*, *Erdős P.* A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations // Proc. Koninkl. Nederl. Acad. Wet. Ser. A. — 1951. — V. 54, N 5. — P. 371–373.
5. *Benda M.*, *Perles M.* Coloring of metric spaces // Geombinatorics. — 2000. — V. 9. — P. 113—126.
6. *Райгородский А. М.* Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // УМН. — 2001. — Т. 56, вып. 1. — С. 107–146.
7. *Elsholtz C.*, *Klotz W.* Maximal dimension of unit simplices // Discrete Comput. Geom. — 2005. — V. 34, N 1. — P. 167—177.
8. *Nechushtan O.* Note on the space chromatic number // Discrete Math. — 2002. — V. 256. — P. 499—507.


*Поступила в редакцию 15.07.2011*