

Решения задач олимпиады летней Школы ПМФ 2010

8 июля 2010 г.

1 О группах перестановок элементов конечных множеств

Лекцию прочитал д.ф.-м.н. **Амосов Григорий Геннадьевич**, доцент кафедры высшей математики МФТИ 2 июля 2010 г. с 9:00 до 10:25.

1.1 Пояснение

Предположим, что у нас имеется множество многочленов от n переменных x_k , $1 \leq k \leq n$, с рациональными коэффициентами. На таком множестве определены операции сложения, вычитания и умножения, так что в математике такое множество называется кольцом. Рассмотрим какую-нибудь перестановку σ на конечном множестве $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, то есть такое преобразование, которое будет менять порядковый номер k элемента $x_k \in X$. Нас будет интересовать вопрос, можно ли продолжить такую перестановку до преобразования кольца многочленов, сохраняющего алгебраические операции (так называемого изоморфизма кольца), то есть так, чтобы для любых двух многочленов f и g выполнялись условия $\sigma(f + g) = \sigma(f) + \sigma(g)$, $\sigma(f - g) = \sigma(f) - \sigma(g)$, $\sigma(fg) = \sigma(f)\sigma(g)$. Оказывается, что далеко не для любой перестановки существует подобное продолжение. Всё зависит от того, существует ли некоторая алгебраическая связь между числами из множества X .

1.2 Задача

Пусть x есть произвольное действительное число, отличное от 0 и 1. Рассмотрим множество из четырёх элементов $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, где $x_1 = x$, $x_2 = -x$, $x_3 = \frac{1}{x}$, $x_4 = -\frac{1}{x}$. *Найти множество всех перестановок X , которые можно продолжить до преобразования σ множества всех многочленов f, g от переменных x_1, \dots, x_4 с рациональными коэффициентами, которое сохраняет алгебраическую структуру, то есть $\sigma(f + g) = \sigma(f) + \sigma(g)$, $\sigma(f - g) = \sigma(f) - \sigma(g)$, $\sigma(fg) = \sigma(f)\sigma(g)$.*

1.3 Ответ

Сохранение алгебраических операций влечёт выполнение условий $\sigma(-f) = -\sigma(f)$ и $\sigma(\frac{1}{f}) = \frac{1}{\sigma(f)}$ (конечно, при условии, что $\frac{1}{f}$ определён). Впрямую проверяется, что такому свойству удовлетворяет лишь четыре перестановки из всего существующих 24:

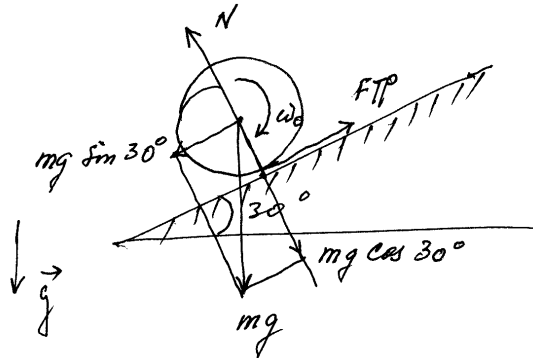
1. тождественная $\sigma(x_k) = x_k$.
2. $\sigma(x) = -x$, $\sigma(-x) = x$, $\sigma(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x}$, $\sigma(-\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}$.
3. $\sigma(x) = \frac{1}{x}$, $\sigma(-x) = -\frac{1}{x}$, $\sigma(\frac{1}{x}) = x$, $\sigma(-\frac{1}{x}) = -x$.
4. $\sigma(x) = -\frac{1}{x}$, $\sigma(-x) = \frac{1}{x}$, $\sigma(\frac{1}{x}) = -x$, $\sigma(-\frac{1}{x}) = x$.

2 Некоторые задачи в условиях сухого трения

Лекцию прочитал к.ф.-м.н. **Федичев Олег Борисович**, доцент кафедры теоретической механики МФТИ 3 июля 2010 г. с 9:00 до 10:25.

2.1 Задача

Цилиндр с радиусом R и массой m лежит на шероховатой наклонной плоскости с углом 30° так, что его ось горизонтальна. В начальный момент времени ему сообщается угловая скорость ω_0 в направлении, указанном на рисунке. При каком коэффициенте трения f движение его центра масс начнётся не сразу, а после некоторого периода застоя? Найдите это время.



2.2 Решение

$$M = mg \cos 30^\circ,$$

$$F_{\text{тр.}} = mgf \cos 30^\circ,$$

$$mg \sin 30^\circ - mgf \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow f = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\frac{mR^2}{2} \dot{\omega} = -F_{\text{тр.}} R = -mgf R \cos 30^\circ,$$

$$R\omega = R\omega_0 - \frac{2gfRt \cos 30^\circ}{R} \Big|_{t=t_*} = 0,$$

$$t_* = \frac{R\omega_0}{2gf \cos 30^\circ} = \frac{R\omega_0}{\sqrt{3}gf} = \frac{R\omega_0}{g}.$$

3 Итерации функций и ветвящиеся случайные процессы

Лекцию прочитал к.ф.-м.н. **Келлин Николай Сергеевич** (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН) 4 июля 2010 г. с 9:00 до 10:25.

3.1 Задача

Доказать, что не существует никаких (в том числе и разрывных) функций $y = f(x)$, определённых при всех x , таких что $f(f(x)) = x^2 - 2010$.

3.2 Решение

Вообще-то вместо 2010, можно взять 0,75.

Поскольку в задаче сделан замах и на разрывные¹ функции, то нельзя пользоваться никакими метрическими свойствами множества \mathbb{R} — области определения искомых функций и правой части $x^2 - c$. Поэтому едва ли не единственная имеющаяся у нас XI класс возможность, это изучение комбинаторно-алгебраических свойств отображения $g(x) = x^2 - c$. Точнее, в надежде получить ожидаемое противоречие изучим структуру множества орбит отображения $g(x)$, то есть последовательностей чисел $x, g(x), g(g(x)), \dots$.

Нетрудно заметить, что при положительных константах c у отображения $g(x)$ есть ровно две тривиальные орбиты — неподвижные точки — решения уравнения $g(x) = x$. Действительно, парабола с вершиной в отрицательной части оси Oy пересекает прямую $y = x$ в двух точках с абсциссами a и b . Пусть $a < 0 < b$. Очевидно, что они будут неподвижными и для всех отображений $g(g(\dots g(g(x)) \dots))$.

Рассмотрим далее итерационный квадрат отображения $g(x)$: $g(g(x)) = (x^2 - c)^2 - c$ и его неподвижные точки суть решения уравнения $g(g(x)) = x$, которое, хоть и четвёртой степени, но решается разложением на квадратичные множители: $g(g(x)) = x \Leftrightarrow (x^2 - x - c) \cdot (x^2 + x - c + 1) = 0$. Корни первого трёхчлена — это a и b . Корни второго трёхчлена обозначим через u и v . При $0.75 < c$ (то есть при положительности второго дискриминанта) они действительны и различны.

ЧЕРТЁЖ! Биссектриса $y = x$ и две пересекающиеся в четырёх точках параболы $x^2 - c$ и $y = \pm(x + c)^{\frac{1}{2}}$.

Подставляя u и v в функцию $g(x)$, получаем, что $g(u) = v$, а $g(v) = u$, то есть u и v образуют единственный цикл $u \rightarrow v \rightarrow u$ длины два отображения $x \rightarrow g(x)$.

Теперь можно предполагать противное: пусть $f(f(x)) = g(x)$. Неподвижные точки и циклы порядка два функции $f(x)$ — это неподвижные точки функции $g(x)$, и наоборот, если $f(a) = d$, то $f(d) = f(f(a)) = g(a) = a$, поэтому $g(d) = f(f(d)) = d$, то есть $d = a$ или $d = b$.

Цикл порядка два функции $g(x)$ должен получаться из цикла порядка четыре функции $f(x)$: если $f(u) = z$, то $f(z) = v$; если $f(v) = w$, то $f(w) = u$. При этом z и w отличны друг от друга и, разумеется, от a, b, u и v .

Но тогда $g(z) = f(f(z)) = w$, а $g(w) = z$.

Таким образом, у функции $g(x)$ обнаружился ещё один цикл длины два, отличный от исходного. **ПРОТИВОРЕЧИЕ.**

¹и даже неизмеримые

4 Биофизика и поиск новых лекарственных средств

Лекцию прочитал к.ф.-м.н. **Федичев Пётр Олегович** (Quantum Pharmaceuticals) 5 июля 2010 г. с 9:00 до 10:25.

4.1 Задача

Рассмотрим заряженный пузырек в воде: эластичную сферу наполненную газом ($\epsilon_{\text{газа}} \approx 1$) с зарядом Q в центре, помещенную в воду, т.е. среду с однородной и большой диэлектрической постоянной ϵ . В связи с тем, что $\epsilon \approx 80$, очень велика, рассчитайте радиус пузырька, в зависимости от давления газа в пузырьке, P в пределе $\epsilon \gg 1$.

4.2 Решение

В результате поляризации воды на поверхности пузырька образуется поверхностный заряд, частично компенсирующий заряд внутри пузырька, так что поле снаружи ослабляется в ϵ раз. Т.е. поверхностный заряд равен $Q_{\text{пов.}} = -Q(1 - 1/\epsilon)$, его плотность — $\sigma = \frac{Q_{\text{пов.}}}{4\pi R^2}$.

Электрическое поле внутри и снаружи у поверхности пузырька составляет

$$E_{\text{вн.}} = k \frac{Q}{R^2}, \quad E_{\text{нар.}} = k \frac{Q}{\epsilon R^2}.$$

Таким образом, на поверхности пузырька поле терпит разрыв. Чтобы найти перепад давления (силу, действующую на единицу поверхности) мы не можем просто умножить σ на E , т.к. E не определено.

Однако, мы можем регуляризовать (сгладить) скачок поля размазав поверхностный заряд равномерно по тонкой оболочке конечной толщины. Внутри такой оболочки поле будет меняться линейно, таким образом, если усреднить поле по заряду, то окажется, что среднее поле, действующее на поверхностный заряд составляет

$$E_{\text{ср.}} = \frac{E_{\text{вн.}} + E_{\text{нар.}}}{2}.$$

Таким образом, перепад давления на поверхности пузырька, вызванный электростатическими силами, составляет²

$$P = \underbrace{\frac{Q(1 - 1/\epsilon)}{4\pi R^2}}_{\sigma} \underbrace{k \frac{Q}{R^2} (1 + 1/\epsilon)}_{E_{\text{ср.}}} = k \frac{Q^2}{4\pi R^4} (1 - 1/\epsilon^2).$$

В системе СИ $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, а в системе СГС $k = 1$.

В пределе $\epsilon \gg 1$, т.е. $\epsilon \rightarrow 0$ (поле снаружи пузырька исчезает), выражение упрощается:

$$P = k \frac{Q^2}{4\pi R^4}.$$

²Давление также можно найти через изменение энергии электрического поля при малом изменении радиуса пузырька.

5 Развертки многогранников и теорема Александрова

Лекцию прочитал к.ф.-м.н. **Гарбер Алексей Игоревич** (Мехмат МГУ, кафедра высшей математики МФТИ) 5 июля 2010 г. с 15:30 до 16:55.

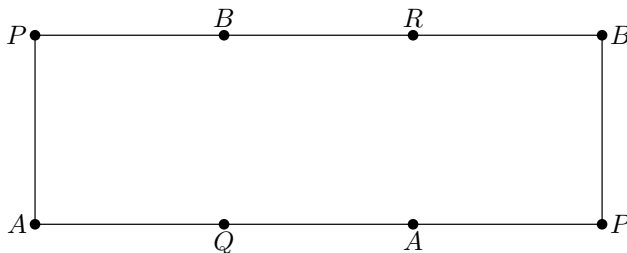
Аннотация

Широко известна развертка куба, представляющая собой крест из шести квадратов. Чуть менее известна, но также широко распространена развертка куба, являющаяся своеобразной "змейкой" также состоящая из шести квадратов, каждый из которых соответствует одной из граней куба.

В данной лекции мы поговорим о развертках произвольных многогранников. В частности мы обсудим вопросы: "Что называется разверткой?" "Для каких разверток существует выпуклый многогранник с данной разверткой?" а также поговорим о теореме А.Д.Александрова, которая утверждает, что для любой развертки, каждая вершина которой имеет неотрицательную кривизну, и которая гомеоморфна сфере, существует и единственный выпуклый многогранник с данной разверткой.

5.1 Задача

Задача. Докажите, что следующий прямоугольник, составленный из трех равных квадратов, с указанными правилами склейки является разверткой некоторого выпуклого многогранника. Найдите многогранник с данной разверткой.



(Точки на верхней и нижней стороне прямоугольника делят каждую из них на три равные части. Правила склейки задаются так, что отрезки границы прямоугольника с одинаково отмеченными концами должны склеиваться.)

5.2 Решение

Вначале докажем, что данная развертка удовлетворяет теореме Александрова. Для каждого отрезка границы (AP, PB, BR, AQ) существует ровно один отрезок с так же отмеченными концами, а значит при указанной склейке не образуется границы.

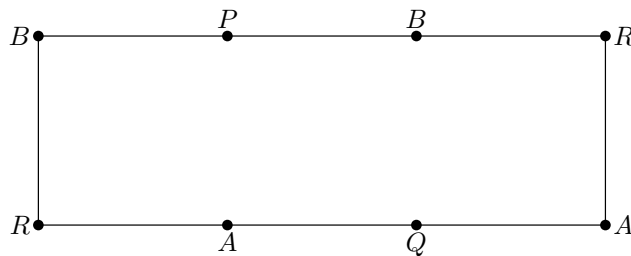
Также при указанной склейке малая окрестность каждой точки является деформированным диском. Для внутренних точек прямоугольника это очевидно, для внутренних точек отрезков AP, PB, BR, AQ границы это следует из того, что для каждого из них есть ровно один соответствующий, а для точек A, B, P, Q, R это проверяется непосредственно. Осталось проверить условие из формулы Эйлера: у данной развертки $f = 1$ грань, $e = 4$ ребер (AP, PB, BR, AQ) и $v = 5$ вершин (A, B, P, Q, R) , а значит условие $v - e + f = 2$ выполнено и по теореме Александрова данная развертка является разверткой некоторого выпуклого многогранника.

Найдем вначале "настоящие" вершины искомого многогранника \mathcal{P} , то есть вершины со строго положительной кривизной. Ни одна точка строго внутри данного прямоугольника не может быть "настоящей" вершиной, так как ее кривизна равна нулю; также "настоящей" вершиной не может быть точка на границе, за исключением точек A, B, P, Q, R , так как в любой такой точке сходятся два угла по π , то есть ее кривизна также равна нулю. Несложным подсчетом получаем, что суммы углов сходящихся в точках A и B равны $\frac{3\pi}{2}$, а в точках P, Q, R — π , то есть точки A, B, P, Q, R являются настоящими вершинами и

всего у \mathcal{P} 5 вершин. Существует два комбинаторно различных (то есть мы рассматриваем только какие вершины соединены ребрами и какие лежат в одной грани, а не длины ребер и форму граней) многогранника с 5 вершинами, это четырехугольная пирамида и треугольная бипирамида.



Отрежем от данного прямоугольника правый квадрат ARB и переставим его к левой границе по стороне AP . В результате получится следующий прямоугольник.



После симметрии относительно вертикальной прямой данный прямоугольник переходит в исходный, у которого точки P, Q, R сдвинулись по циклу P в Q , Q в R , R в P , а точки A и B остались на месте. А значит существует и аналогичное движение многогранника \mathcal{P} . Для четырехугольной пирамиды такого движения нет, так как ее вершина должна оставаться на месте (она единственная из которой выходит четыре ребра), а значит одна из вершин основания должна оставаться на месте. Но при этом три остальные вершины основания не могут переставляться по циклу.

Таким образом, \mathcal{P} это бипирамида $ABPQR$ с вершинами A и B и основанием PQR . Более того, в силу указанного выше движения, длины сторон треугольника PQR равны, а также верны равенства углов $\angle PAQ = \angle QAR = \angle RAP$ и $\angle PBQ = \angle QBR = \angle RBP$ и равенства отрезков $AP = AQ = AR$ и $BP = BQ = BR$. Суммы плоских углов у вершин A и B равны по $\frac{3\pi}{2}$, а значит каждый из указанных углов равен по $\frac{\pi}{2}$. С учетом всего вышесказанного многогранник \mathcal{S} определяется однозначно, это бипирамида, составленная из двух правильных треугольных пирамид, причем все плоские углы при вершинах пирамид равны по $\frac{\pi}{2}$.

Замечание. Каждая из таких пирамид получается если от куб разрезать плоскостью, проходящей через три вершины, соседние с данной вершиной S .

6 Необычные свойства обычного пространства, или как измерить длину доски

Лекцию прочитал к.ф.-м.н. **Зеленов Евгений Игоревич** (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН) 6 июля 2010 г. с 9:00 до 10:25.

6.1 Подходы математической физики. Одна из возможных точек зрения.

Математическая физика (МПФ) — особый взгляд на физическую реальность.

Почему все-таки физика? Просто потому, что исходные мотивировки МПФ — построение моделей конкретных физических явлений, или построение теорий, описывающих физические явления.

Почему математическая физика? С точки зрения математической физики, соотношения между математическими понятиями (которые моделируют физические объекты) имеют самостоятельную ценность, и столь же реальны, как и физические законы. Продукт труда математического физика - математическое утверждение (Теорема). Физика в этом процессе выступает как источник мотивировок на этапе постановки задачи, и как источник вдохновения - физическая интуиция - в процессе решения.

6.2 Моделирование реальности.

Алгоритм действия таков: физическое явление \rightarrow математическое понятие \rightarrow математическое утверждение. Первый шаг этого алгоритма условно назовем моделированием физической реальности.

Рассмотрим простой, на первый взгляд, физический эксперимент. Задача - измерить длину линейного объекта, например, доски. Другими словами, для конкретной доски мы должны сделать утверждение: длина доски составляет столько-то метров, сантиметров, миллиметров, долей миллиметра и т.д.

Прежде всего нужно определить, что такое один метр. Другими словами, нужен эталон. История эталона метра весьма поучительна, и как в зеркале отражает развитие экспериментальной физики. Для наших простых целей используем так называемый "архивный" эталон (брусок из сплава платины и иридия, который хранится в Международном бюро мер и весов в Севре, использовался в качестве эталона до 1960 года). Современные эталоны устроены, конечно, совсем иначе. Отметим только, что точность современных эталонов для атомных измерений составляет около 10^{-13} м - это будет нам важно в дальнейшем.

Начинаем мерять нашу доску и смотреть, какие математические понятия возникают в этом процессе. Процесс разобьем на несколько этапов.

Этап 0.

Берем некоторое количество эталонов и прикладываем их один к другому, начиная с начала доски до тех пор, пока конец некоторого эталона не выдет за пределы доски. На этом первый этап измерений заканчиваем.

Проанализируем, какие математические понятия и утверждения нам потребовались на этом этапе.

Фраза "... некоторое количество эталонов ..." подразумевает понятие *натурального числа* - числа $1, 2, 3, \dots$. Развивая это понятие, приходим к понятию *целого числа*, и далее к понятию *группа целых чисел*. Группа целых чисел \mathbb{Z} - это множество, состоящее из следующих элементов: натуральные числа $1, 2, 3, \dots$, обратные к натуральным числам $-1, -2, -3, \dots$ и 0 с операцией сложения.

Символически результат первого этапа можно записать следующим образом.

$$k_0 \leq L < k_0 + 1.$$

L - искомая длина доски.

Заметим также, что для написания формулы нам потребовалось математическое понятие *упорядоченное множество*.

И последнее, что мы отметим, - мы приняли на веру тот интуитивно очевидный факт, что, прикладывая один эталон к другому, мы достигнем конца доски. В дальнейшем попробуем в этом усомниться и посмотреть, к чему это приведет.

Подводя итоги нулевого этапа измерений, можно сказать, что длина доски больше k_0 метров и меньше $k_0 + 1$. Может, конечно, повезти, и длина будет ровно k_0 метров, на этом наш увлекательный процесс закончится. В общем же случае,

$$L = k_0 + \Delta_1,$$

кусочек доски, длина которого меньше метра.

Этап 1.

Немного упростим себе жизнь и будем считать, что мы умеем точно распилить эталон пополам. Другими словами, у нас есть эталон $1/2, 1/4, \dots, 1/1024, \dots$ метра. Заметим сразу, что мы ввели, таким образом, понятие *рационального числа*. Рациональное число - это отношение двух целых чисел. Рациональные числа можно не только складывать и вычитать, но и умножать и делить, причем, умножение и сложение согласованы определенным образом. Такой объект называется полем. Таким образом, на втором этапе измерений мы работаем не с группой целых чисел, а с *полем рациональных чисел* \mathbb{Q} . Теперь проделаем процедуры этапа 0, но для доски Δ_1 и эталоном полуметра. Получим соотношение

$$1/2k_1 \leq \Delta_1 < 1/2k_1 + 1/2,$$

$$L = k_0 + \frac{1}{2}k_1 + \Delta_2,$$

где Δ_2 - доска длины меньше чем полметра. Заметим, что, поскольку длина обрезка Δ_1 меньше метра, то k_1 либо 0, либо 1.

Этап n.

$$L = k_0 + \frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{4} + \dots + \frac{k_n}{2^n} + \Delta_{n+1}.$$

Процесс, вообще говоря, может никогда не остановиться. Но, в какой-то момент, мы будем считать, что отрезок Δ_{n+1} достаточно маленький. Что значит достаточно? С точки зрения физики, это 10^{-13} м - предел точности самого эталона. С точки зрения математической физики - ограничения пока нет.

Попытаемся понять, что значит маленький. Математическое понятие - *норма рационального числа*. Нормой называется отображение поля рациональных чисел \mathbb{Q} в множество неотрицательных рациональных чисел, $q \rightarrow |q|$, обладающее свойствами

1. $|0| = 0$,
2. $|q_1 q_2| = |q_1| |q_2|$,
3. $|q_1 + q_2| \leq |q_1| + |q_2|$.

Понятие нормы и, соответственно, малости, позволяет ввести понятие "хороших" (фундаментальных) последовательностей. Последовательность рациональных чисел $\{q_n \ n = 1, 2, \dots\}$ называется *фундаментальной*, если, начиная с некоторого достаточно большого номера, норма разности $|q_n - q_m|$ меньше любого наперед заданного числа.

Фундаментальные последовательности хороши тем, что с ними можно работать как с обычными числами - складывать, вычитать, умножать и делить. Рациональным числам при этом соответствуют конечные фундаментальные последовательности. Процедура добавления к рациональным числам всех фундаментальных последовательностей называется *полнением поля рациональных чисел по норме*.

Таким образом, процесс измерения доски можно вообще не останавливать. Тогда, вообще говоря, результатом измерения будет фундаментальная последовательность рациональных чисел (если повезет - то рациональное число).

Приведем пример нормы. Пусть q - рациональное число. Тогда, если q - положительное, то $|q| = q$, если же q - отрицательное, то $|q| = -q$. (Обычное абсолютное значение)

Задача. Доказать, что это норма.

Пополнение поля рациональных чисел по этой норме есть поле действительных чисел \mathbb{R} .

Подводя итоги первого часа, напомним математический багаж, который мы приобрели.

- Группа целых чисел \mathbb{Z}
- Упорядоченное множество
- Поле рациональных чисел \mathbb{Q}
- Норма
- Пополнение по норме
- Поле вещественных чисел \mathbb{R}

6.3 Квантовая доска

Напомним, что ранее мы приняли на веру тот интуитивно очевидный факт, что, прикладывая один эталон к другому, мы достигнем конца доски. Тем не менее, это совершенно определенное предположение об устройстве пространства, а именно, аксиома Архимеда. Для нашего случая она звучит так: если даны два отрезка, то отложив достаточное количество раз меньшего из них, можно покрыть больший. Эту аксиому еще называют аксиомой измеримости.

Какие у нас есть основания, чтобы усомниться в справедливости аксиомы Архимеда?

Первое основание довольно банальное. Как уже отмечалось, точность современных эталонов длины обеспечивает измеримость до расстояний 10^{-13} м. Что делать, если необходимо работать с меньшими длинами?

Можно было бы возразить, что развитие технологии позволит улучшить до любых пределов качество эталонов. Однако, существует принципиальный предел - Планковская длина 10^{-35} м. Существование этого принципиального предела измеримости следует из квантовой гравитации. Попробую это пояснить.

Современный эталон метра выглядит следующим образом: длина одного метра в настоящий момент установлена равной пути, проходимому светом в вакууме за $1/299\,792\,458$ секунды. Это означает, что если мы хотим иметь эталон точности Δx , мы должны уметь определять координату частицы с этой точностью. В соответствии с принципом неопределенности Гейзенберга, это означает, что в пучке фотонов, используемых для определения координаты частицы с точностью Δx неизбежно присутствуют фотоны с импульсом, большим чем $h/\Delta x$ (и, соответственно, энергией, большей чем $ch/\Delta x$). Это следствие из фундаментального принципа квантовой механики пока не создает принципиальных ограничений для создания эталона длины сколь угодно большой точности. Однако, для этого потребуется использовать частицы со сколь угодно большой энергией.

Добавим теперь в нашу схему общую теорию относительности Эйнштейна. В соответствии с ОТО, в присутствии частиц с массой (энергией) пространство перестает быть плоским. Чем выше энергия частицы, тем выше кривизна пространства. Это вносит свои коррективы в процесс измерения и приводит к весьма интригующему результату. Если мы верим в справедливость квантовой механики и ОТО (теории, имеющие блестящие экспериментальные подтверждения), то существует абсолютный предел измеримости - Планковская длина.

Это приводит к абсолютно новым представлениям о структуре пространства на субпланковских масштабах. Одна из идей (И.В. Волович) - аксиома Архимеда не выполняется, т.е. пространство неархимедово.

6.4 p -Адические числа.

Попробуем перевести эту идею на язык математических утверждений. Из нашего приобретенного математического багажа хотелось бы сохранить рациональные числа и понятие нормы.

Ранее мы рассмотрели в качестве примера одну норму на поле рациональных чисел. Оказывается, есть и другие. Выберем простое число p и представим рациональное число q в виде $q = p^\gamma t/n$, где целые числа t и n не делятся на p . Легко заметить, что это можно сделать единственным образом. Определим p -адическую норму числа q по формуле $|q|_p = p^{-\gamma}$.

Пример. Проверить, что выполняются аксиомы нормы.

Легко заметить, что нормы любого целого числа меньше или равна 1. Следовательно, сколько бы мы не брали эталонов p -адической длины 1, суммарная их длина будет меньше 1. Аксиома Архимеда не выполняется. Выполнив процедуру пополнения по этой норме, получим поле \mathbb{Q}_p p -адических чисел. Поле p -адических чисел обладает весьма экзотической геометрией. Основа всей экзотики - справедливость более сильного неравенства, чем неравенство треугольника. А именно, $|q_1 + q_2|_p \leq \max\{|q_1|_p, |q_2|_p\}$.

Пример. Доказать сильное неравенство треугольника.

В качестве демонстрации необычных свойств p -адической геометрии, докажем такое утверждение. *Любая точка шара является его центром.*

Действительно, пусть B_0 - шар с центром в нуле, а B_a - шар с центром в a и $|a|_p \leq 1$. Если $x \in B_0$, т.е. $|x|_p \leq 1$, то $|x - a|_p \leq 1$ и, следовательно, $x \in B_a$, т.е. $B_0 \subset B_a$. Обратно, пусть $x \in B_a$. Предположим, что $|x|_p > 1$. Тогда $1 < |x|_p = |x - a + a|_p \leq \max\{|x - a|_p, |a|_p\} \leq 1$. Полученное противоречие показывает, что $x \in B_0$ и, следовательно, $B_a \subset B_0$.

Из доказанного немедленно следует, что *два шара одинакового радиуса либо не пересекаются, либо совпадают.*

Стоит заметить, что p -адические числа являются стандартным инструментом в теории чисел, гипотеза о неархимедовой природе пространства на субпланковских масштабах возникла в конце 80-х.

Самое любопытное, что у нас не такой уж большой выбор. Оказывается (теорема Островского), на поле рациональных чисел существует абсолютное значение, семейство p -адических норм, и других норм не существует.

Это чисто математическое утверждение. Какие физические законы оно отражает? Ответом на этот вопрос будет построение теории, которая будет неархимедовой на субпланковских масштабах, и перейдет в привычную архимедову на больших масштабах.

6.5 Задача о p -адическом плотнике и p -адической доске

Пусть есть доска p -адической длины a . Показать, что какую бы часть от нее не пытался отрубить p -адический плотник, оставшаяся часть будет иметь по-прежнему длину a .

6.6 Решение

Доска имеет длину a . Плотник отрубает от нее часть длины b . Слово "часть" в условии задачи означает, что $|b|_p < |a|_p$. Длина оставшейся части равна $|a - b|_p$. Нужно показать, что выполнено равенство $|a - b|_p = |a|_p$.

Из сильного неравенства треугольника следует, что

$$|a - b|_p \leq \max\{|a|_p, |b|_p\},$$

следовательно,

$$|a - b|_p \leq |a|_p$$

по условию задачи. Покажем, что в последнем неравенстве имеет место равенство. Допустим обратное, то есть предположим, что выполнено строгое неравенство. Тогда

$$|a - b|_p < |a|_p = |a - b + b|_p \leq \max\{|a - b|_p, |b|_p\}.$$

Максимум в последнем неравенстве не может достигаться на $|b|_p$ - это противоречило бы условию задачи. Следовательно, он достигается на $|a - b|_p$ и, следовательно, получаем противоречие

$$|a - b|_p < |a - b|_p.$$

Следовательно, $|a - b|_p = |a|_p$. Задача решена.

7 Биофизика

Лекцию прочитал к.ф.-м.н. **Васильев Алексей Артёмович** (ИТЭФ, кафедра биофизики и экологии МФТИ) 6 июля 2010 г. с 15:30 до 16:55.

7.1 Задача

Какой вид имеют зависимости от времени для ускорения и скорости бегуна при разгоне? Какие различные с физической точки зрения фазы разгона можно выделить, какие математические выражения их описывают? Оцените время разгона, начальное ускорение и конечную скорость для человека массой около 80 кг, используя справочные данные. Постройте графики зависимости скорости и ускорения от времени.

7.2 Указания к решению

С физической точки зрения можно выделить три фазы.

1. Начальную фазу разгона (при нулевой скорости и малых скоростях, пока не лимитирует ограничение по мощности) определяет максимальная сила, которую способен развить бегун $F = F_{max} = fS$, где удельная сила $f = 40 - 50 \text{ Н/см}^2$ (по справочным данным), а площадь поперечного сечения S — это доля поперечника тела, используемого при разгоне. Величину S можно оценить грубо как поперечное сечение ноги, учитывая, что с одной стороны, работает и мускулатура тела, отвечающая большему поперечному сечению, а с другой стороны, не весь поперечник ноги заполнен мышцами, участвующими в разгоне. . .

Если считать максимальную силу неизменной (т.е. пренебречь утомлением на этой фазе), то это режим $F = F_{max} = \text{const}$, т.е. $a = \text{const}$.

2. Затем ограничивает максимальная достигаемая мощность: $N_{max} = Fv = \text{const}$, т.е. $av = \text{const}$.

Если использовать справочные данные, принимая $N_{max} = 30I_0$, получим (переведем I_0 в Вт и учитывая КПД=20-25% — по справочным данным) связь скорости и ускорения.

В реальности максимальная мощность на малых временах больше, чем по этой оценке (т.к. кратковременно мускулатура способна работать без потребления кислорода с мощностью порядка $100I_0$, но эта величина не обсуждалась на лекции и не приведена в справочных данных). Школьник этого не знает, но может обратить на отличие расчетной величины от известных данных при разгоне на 100 метровке.

3. Стационарную скорость (при нулевом ускорении, т.е. в режиме $a = 0, v = \text{const}$) определяют затраты на движение. По справочным данным затраты на бег $2,7m^{-7/18} \text{ ккал} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{км}^{-1} = q(m)$

Отсюда оценка стационарной скорости по уравнению $I = vmq(m)$.

Конец фазы 2 соответствует окончанию разгона, отсюда оценивается время разгона.

Грубую оценку для времени разгона можно получить, зная начальное ускорение и конечную скорость.

7.3 Справочные данные

0. Обозначения

а.о. - аминокислотный остаток; п.н. — пара нуклеотидов ЭТЦ — электрон-транспортная цепь; C_2, C_3, C_4 и т.д. — 2-х, 3-х, 4-х углеродные соединения,

1. Молекулярные массы ($1 \text{ Да} = 1.661 \times 10^{-24} \text{ г}$):

АТФ — 507 Да «средний» белок — 30 000 Да; «средний» а.о. — 110 Да; п.н. — 660 Да; гемоглобин (Hb) — 68 000 Да; миоглобин (Mb) — 17 000 Да РДФК (рибулезодифосфат-карбоксилаза) — 550 000 Да.

2. Характеристики вторичной структуры макромолекул:

белковая α -спираль: правая; на 1 виток приходится 3.6 а.о.; на 1 а.о. приходится 0.15 нм; шаг спирали составляет 0.54 нм; диаметр спирали без учета боковых групп — 0.6 нм;

β -конформация — максимально вытянутая полипептидная цепь; на 1 а.о. приходится 0.347 нм;

коллагеновая спираль: на 1 виток приходится 3 а.о.; на 1 а.о. приходится 0.29 нм;

двойная спираль ДНК (В-конформация): на 1 виток приходится 10 п.н.; вклад каждой п.н. в общую длину молекулы ДНК - 0.34 нм

Размер статистического сегмента: белок — 10 нм; ДНК — 100 нм

3. Универсальные постоянные:

Число Авогадро: $N_A = 6.021023$ молекул/моль

Элементарный заряд: $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл

Число Фарадея: $F = eN_A = 23062$ кал/(В моль) = 96485 Кл/моль

Постоянная Планка: $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ Дж с

Универсальная газовая постоянная: $R = 8.314$ Дж/(моль К)

Постоянная Больцмана: $k = R/N_A = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К

Объем моля идеального газа при $T = 273.15$ К и $p = 1$ атм:

$V = RT/p = 22.414$ л/моль.

Коэффициенты пересчета:

1 Кюри (Ci) = 3.7 10¹⁰ Бк = 3.7 10¹⁰ распадов/с;

1 кал = 4.184 Дж. 1 эВ = 1.6 77 010 5-19 0 Дж.

$K = 0C + 273$; 1 атм = 760 мм рт. ст. = 760 торр = 101325 Па.

Количество растворенных в воде газов пропорционально их «парциальному» давлению. При $P = 1$ атм, $T = 15^\circ C$

Кислород 34,1 мл $O_2(g)$ /л воды

Азот 16,9 мл $N_2(g)$ /л воды

Углекислый газ 1019,0 мл $CO_2(g)$ /л воды

температура (оС)	0	10	20	30	37	40	50	100
давление паров H ₂ O (% от 1 атм)	0,6	1,2	2,3	4,2	6,4	7,3	12,2	100

Вода: вязкость = 0,01 г/(см с), теплоемкость = 75,5 Дж/моль К = 1 кал/г К; теплота испарения (40°С) = 10,3 ккал/моль.

Воздух: теплоемкость = 0,24 кал/(г К) = 10 Дж/(г К); плотность = 1,29 кг/м³ (40°С); вязкость = 0,00018 г/(см с)

Жир: теплопроводность 0,15 Вт · м⁻¹ · град⁻¹ ;

Мех животных теплопроводность 91×10^{-6} кал · см⁻¹с⁻¹ · град⁻¹; плотность = 0,06 г/см³

Объем жидкости или газа, прокачиваемый под давлением Δp :

• **через щель** высотой h , длиной l и шириной a ($a \ll h$): $Q = 1/12a^3 3h \Delta p / (\eta l)$

• **для цилиндра** радиуса r : $Q = \pi/8r^4 \Delta p / (\eta l)$ (формула Пуазейля)

Интенсивность полного **солнечного света** = 500 Вт/м²

4. Количественные характеристики энергетических процессов:

Энергия АТФ (гидролиз до АДФ и Φ_H) = 45-50 кДж/моль при условиях в животной клетке 35 кДж/моль при условиях в растительной клетке (30,2 кДж/моль при $[АТФ] = [АДФ] = [\Phi_H] = 1M$)

Энергия НАДФН - 219 кДж/моль → 3 АТФ (в ЭТЦ митохондрий) (230 кДж/моль в животной клетке при $[НАДФН]/[НАДФ] = 10^2$)

НАДН - 219 кДж/моль → 3 АТФ (в ЭТЦ митохондрий) (202 кДж/моль в животной клетке при $[НАДН]/[НАД] = 10^{-3}$)

ФАДН → 2 АТФ (в ЭТЦ митохондрий)

Цикл Кребса

ацетил (C^2) ГТФ + ФАДН + 2 НАДН + НАДФН 12 АТФ (в ЭТЦ митохондрий)

Гликолиз

глюкоза $C_6H_{12}O_6 \rightarrow 2ATP$

гликоген $(C_6H_{12}O_6)_n \rightarrow 3nATP$

Дыхание (гликолиз + цикл Кребса)

$C_6H_{12}O_6 + 6O_2 \rightarrow 6CO_2 + 6H_2O + 2900 \text{ кДж} \rightarrow 38ATP$ (в ЭТЦ митохондрий)

5. Энергетические запасы человека

в печени - до 500 г гликогена,

в скелетных мышцах - до 200 г,

в сердечной мышце и в мозгу - около 90 г гликогена.

резервный жир - 67 г на 1 кг массы тела

резервные белки - 67 г на 1 кг массы тела

Продукция тепла, потребление кислорода и образование воды при метаболизме

питательное вещество	ккал/г	л O_2 /г	ккал/ л O_2	ДК= CO_2/O_2	г H_2O /г	г H_2O /ккал
Углевод	4,2	0,84	5,0	1,00	0,56	0,13
Жир	9,4	2,0	4,7	0,71	1,07	0,11
Белок (\rightarrow мочевины)	4,3	0,96	4,5	0,81	0,39	0,09
белок (\rightarrow мочевины к-та)	4,25	0,97	4,4	0,74	0,50	0,11

\Rightarrow пересчет 4,8 ккал = 20 кДж = л O_2 .

«аллометрические соотношения»

-потребление O_2 , m - масса в кг

для теплокровных (39°C) $I_0 = 0,7 \text{ м}^3/4 \text{ л } O_2/\text{ч}$, обычные нагрузки 2 I_0 , длительно выдерживаемая повышенная нагрузка 3 I_0 , максимальные выдерживаемые нагрузки обычно 10 I_0 , у отдельных видов и особей 25-30 I_0

у холоднокровных (20°C) $I_0 = 0,04 \text{ м}^3/4 \text{ л } O_2/\text{ч}$

Размеры тела и соотношения параметров у млекопитающих (с.282)

потребление O_2 (л/ч) 0,696 $\text{м}^3/4$ (I)

потребление O_2 (л O_2 /кг о ч) 0,696 $\text{м}^{-1}/4$ (i)

вентиляция легких (л/ч) 20,0 $\text{м}^3/4$

объем легких (л) 0,063 $\text{м}^1,02$

дыхательный объем (л) 0,0062 $\text{м}^1,01$

объем крови (л) 0,055 $\text{м}^0,99$

вес сердца (кг) 0,0058 $\text{м}^0,99 = 0,006 \text{ м}$

частота дыхания (/мин) 53,5 $\text{м}^{-0,26}$

частота сокращений сердца (/мин) 241 $\text{м}^{-0,25}$

масса почек (кг) 0,021 $\text{м}^0,85$

масса печени (кг) 0,082 $\text{м}^0,87$

\Rightarrow площадь поверхности тела (м^2) $S(m) = 0,1 \text{ м}^2/3$

обмен O_2 для млекопитающих: = 0,33 л O_2 о м^{-2} <поверхности альвеол> ч $^{-1}$

<затраты на движение в зависимости от размера, m - масса в кг>

бег 2,7 $\text{м}^{-7}/18$ ккал о кг^{-1} о км^{-1}

полет 0,9 $\text{м}^{-5}/18$ ккал о кг^{-1} о км^{-1}

плавание 0,4 $\text{м}^{-5}/18$

<за пределами диапазона 10-3 - 10 кг значения, рассчитанные по приведенной зависимости затрат на плавание можно рассматривать как ориентировочные, непосредственного подтверждения для этой зависимости нет>

КПД превращения химической энергии в механическую в мышце - 20-25

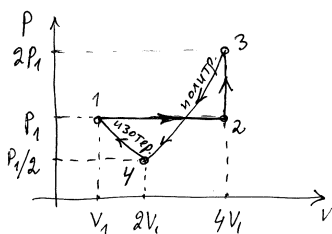
Максимальная сила сокращения мышц - 40-50 Н/см 2

6. Содержание в крови у человека (в норме): глюкоза - 3,5-5,5 мМ; кислород - 200 мл O_2 (г)/л крови; углекислый газ (все формы) артериальная кровь - 500 мл CO_2 (г)/л крови венозная кровь - 550 мл CO_2 (г)/л крови

8 Второе начало термодинамики

Лекцию прочитал к.т.н. **Овчинкин Владимир Александрович** (кафедра общей физики МФТИ) 7 июля 2010 г. с 9:00 до 10:25.

8.1 Задача



На PV -диаграмме изображён круговой процесс 1-2-3-4-1 с одним молем двухатомного газа. Процесс 1-2 — изобарный; 2-3 — изохорный; 3-4 — политропический процесс $PV^n = \text{const}$, где n — неизвестная постоянная; 4-1 — изотермический процесс. Найти КПД этого цикла. Является ли устройство, работающее о этому круговому процессу тепловой машиной?

Указание: Константа $n = \frac{C - C_p}{C - C_v}$ — в политропическом процессе с постоянной теплоёмкостью C .

8.2 Решение

$$C_v = \frac{5}{2} R, \quad C_p = \frac{7}{2} R$$

$$\eta = \frac{Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41}}{Q^+}$$

Процесс 1-2:

$$\left. \begin{array}{l} P_1 V_1 = RT_1 \\ P_1 4V_1 = RT_3 \end{array} \right\} \Rightarrow T_2 = 4T_1;$$

Процесс 2-3:

$$2P_1 \cdot 4V_1 = RT_3 \Rightarrow T_3 = 8T_1;$$

Изотерма 4-1: $T_4 = T_1$;

$$Q_{12} = C_p(T_2 - T_1) = 3C_p T_1 = \frac{21}{2} RT_1;$$

$$Q_{23} = C_v(T_3 - T_2) = 4C_v T_1 = 10RT_1.$$

Политропа 3-4:

$$2P_1(4V_1)^n = \frac{P_1}{2}(2V_1)^n \Rightarrow 4 \cdot 4^n = 2^n$$

или $4 \cdot 2^n = 1$, откуда

$$n = -2.$$

$$n = -2 = \frac{C - C_p}{C - C_v} \Rightarrow C - C_p = -2C + 2C_v$$

$$C = \frac{2}{3}C_v + \frac{1}{3}C_p = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2}R + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{2}R = \frac{17}{6}R.$$

Таким образом:

$$Q_{34} = C(T_4 - T_3) = -C \cdot 7T_1 = -\frac{119}{6} RT_1 < 0$$

$$Q_{41} = -RT_1 \ln \frac{V_4}{V_1} = -RT_1 \ln 2 < 0$$

Итак КПД:

$$\eta = 1 + \frac{Q_{34} + Q_{41}}{Q_{12} + Q_{23}} = 1 - \frac{\frac{119}{6} + \ln 2}{\frac{21}{2} + 10} = 1 - \frac{119 + 6 \ln 2}{123} = \frac{4 - 6 \ln 2}{123} \approx -\frac{0,119}{123} \approx -0,0013.$$

9 Сложение дробей по-американски

задачу предложил к.ф.-м.н. **Иванов Михаил Геннадьевич**, доцент кафедры теоретической физики МФТИ.

9.1 Задача

Американский школьник сложил несколько дробей числитель с числителем, а знаменатель с знаменателем (поскольку это «не настоящее сложение» мы обозначим его значком \oplus):

$$\frac{a}{x} \oplus \frac{b}{y} \oplus \dots \oplus \frac{c}{z} = \frac{a + b + \dots + c}{x + y + \dots + z}.$$

Придайте физический и/или математический смысл данной операции.

Вопросы по условиям задачи не принимаются. Думайте сами.

9.2 Решение

Легко убедиться, что результат сложения дробей по-американски зависит от того, в какой форме представлены дроби, т.е. ответ меняется при умножении числителя и знаменателя на одно и то же число.

Также легко убедиться, что при «сложении» двух дробей $\frac{x}{x} \leq \frac{b}{y}$ результат всегда лежит между ними.

$$\frac{x}{x} \leq \frac{a + b}{x + y} \leq \frac{b}{y}.$$

Это наводит на мысль, что «сложение по-американски» — это разновидность усреднения. И действительно

$$\frac{a + b + \dots + c}{x + y + \dots + z} = \frac{\frac{a}{x}x + \frac{b}{y}y + \dots + \frac{c}{z}z}{x + y + \dots + z}.$$

Т.е. это усреднение дробей с весом, в роли веса выступает знаменатель соответствующей дроби.

Операция нахождения среднего взвешенного широко применяется в физике, например, координата центра масс — среднее взвешенное от координат всех материальных точек (все — масса точки), средняя скорость — среднее взвешенное от скоростей в разные периоды времени (вес — время) и т.д.

Возможны и другие интерпретации, чья ценность определяется их нетривиальностью и применимостью.